# Droites et plans de l’espace

## A) Le plan.

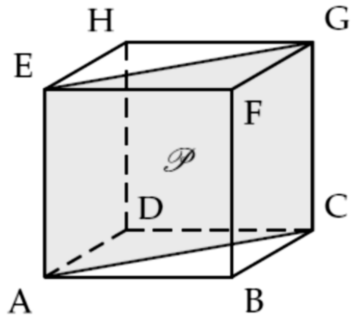
Théorème :

Un plan $P$ peut être défini par trois points $A$, $B$ et $C$ non alignés. Il est alors noté $(ABC)$.
Un plan peut être aussi défini par deux droites sécantes ou strictement parallèles.

*Exemple :*

*Dans le cube $ABCDEGFH$, le plan $P$ peut être défini par :*

- *les points $A$, $E$ et $C$. Il peut être noté $(AEC)$*
- *les droites $(EC)$ et $(AG)$.*
- *les droites $(AE)$ et $(CG)$.*




## B) Positions relatives entre des droites et des plans.

### 1. Positions relatives de deux droites.

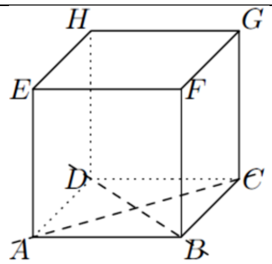
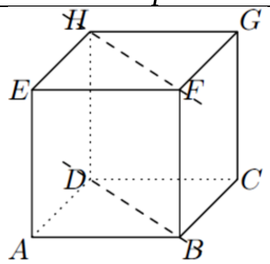
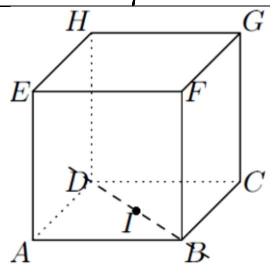
Propriétés :

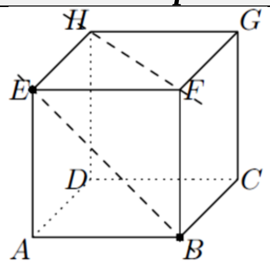
Deux droites de l’espace sont soit :

1) **coplanaires** (c’est-à-dire qu’il existe un plan les contenant toutes les deux).
2) **non coplanaires** (c’est-à-dire qu’il n’existe aucun plan les contenant toutes les deux).

Propriété :

Si elles sont coplanaires, alors elles sont soit sécantes, soit parallèles (strictement parallèles ou confondues).

<table>
<tr><th colspan="3">Droites coplanaires</th></tr>
<tr><td>Droites sécantes</td><td colspan="2">Droites parallèles : strictement ou confondues</td></tr>
<tr><td><br>Les droites $(AC)$ et $(DB)$ sont sécantes</td><td><br>$(BD)$ et $(FH)$ sont strictement parallèles</td><td><br>$(BD)$ et $(BI)$ sont confondues</td></tr>
</table>

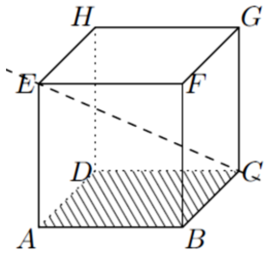
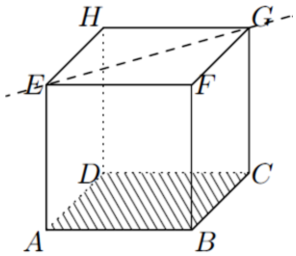
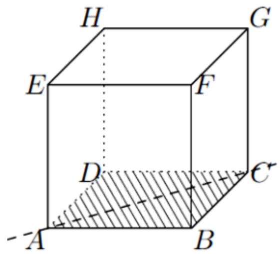
<table>
<tr><th>Droites non coplanaires</th></tr>
<tr><td><br>$(BC)$ et $(AF)$ sont non coplanaires</td></tr>
</table>

### 2. Positions relatives entre une droite et un plan.

Propriétés :

Une droite et un plan peuvent être :

- **sécants** : si la droite et le plan ont un seul point commun.
- **parallèles** : si la droite et le plan n'ont aucun point commun ou si la droite est contenue dans le plan.

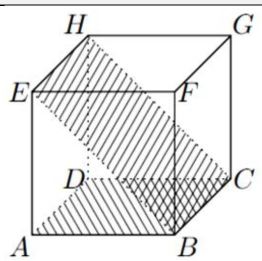
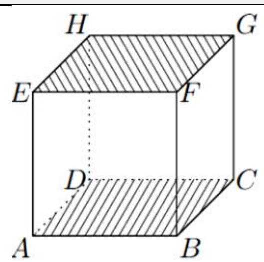
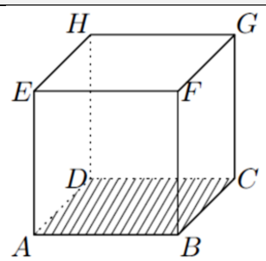
| ***Droite et plan sécants*** | ***Droite et plan parallèles*** | |
|---|---|---|
| <br>La droite $(EG)$ est sécante en $G$ au plan $(ABC)$ | <br>La droite $(EG)$ est strictement parallèle au plan $(ABC)$ | <br>La droite $(AC)$ est contenue dans le plan $(ABC)$ |

### 3. Positions relatives entre deux plans.

Propriétés :

Deux plans peuvent être :

- **parallèles** : si les deux plans n'ont aucun points commun ou si les deux plans sont confondus.
- **sécants** : si les deux plans ont une droite en commun.

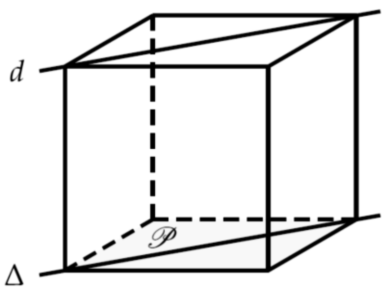
| ***Plans sécants*** | ***Plans parallèles*** | |
|---|---|---|
| <br>Les plans $(ABC)$ et $(EBC)$ sont sécants en $(BC)$ | <br>Les plans $(ABC)$ et $(EFG)$ sont strictement parallèles | <br>Les plans $(EAD)$ et $(ADH)$ sont confondus |

## C) Parallélisme.

### 1. Parallélisme d'une droite et d'un plan.

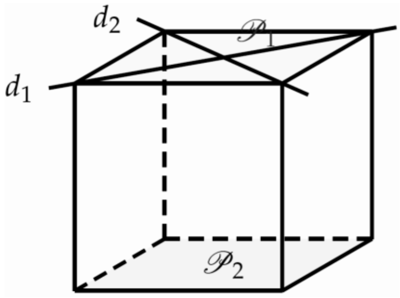
Propriété :

Une droite $d$ est parallèle à un plan $P$ si et seulement si $d$ est parallèle à une droite $\Delta$ contenue dans le plan $P$.



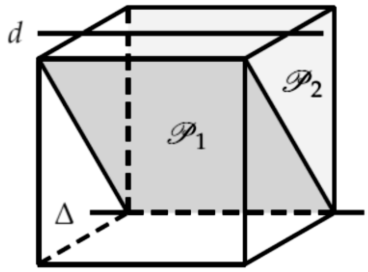
<u>Propriété</u> :

Si un plan $P_1$ contient deux droites sécantes $d_1$ et $d_2$ parallèles à un plan $P_2$, alors les plans $P_1$ et $P_2$ sont parallèles.



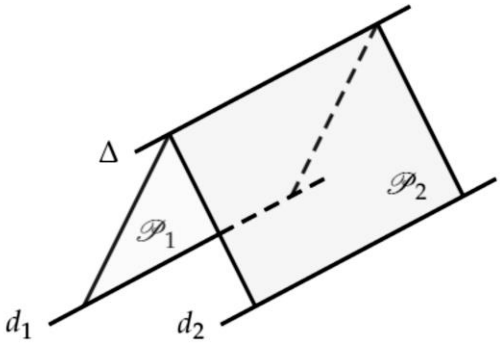

<u>Propriété</u> :

Si une droite $d$ est parallèle à deux plans $P_1$ et $P_2$ sécants en une droite $\Delta$ alors $d$ et $\Delta$ sont parallèles.




<u>Théorème</u> : **Théorème du toit**

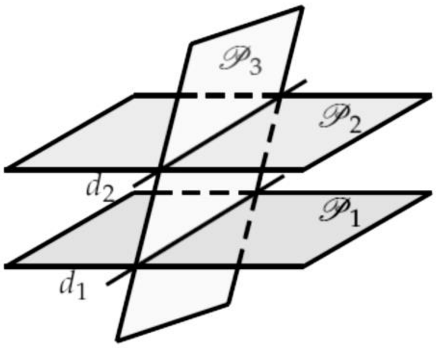
Soient $d_1$ et $d_2$ deux droites parallèles contenues respectivement dans les plans $P_1$ et $P_2$.
Si ces deux plans $P_1$ et $P_2$ sont sécants en une droite $\Delta$ alors la droite $\Delta$ est parallèle à $d_1$ et $d_2$.




## 2. <u>Parallélisme de deux plans.</u>

<u>Propriété</u> :

Si deux plans $P_1$ et $P_2$ sont parallèles, alors tout plan $P_3$ sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection $d_1$ et $d_2$ sont parallèles.



# D) Vecteurs de l’espace.

## 1. Notion de vecteurs dans l’espace et translation.

Définition :

Un vecteur de l'espace est défini par une direction de l'espace, un sens et une norme (longueur).

*Remarque : les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane : relation de Chasles, propriétés en rapport avec la colinéarité, …*

Définition : Translation

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l’espace. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ la transformation qui au point $M$ associe le point $M’$, tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

## 2. Combinaison linéaire de vecteurs de l’espace.

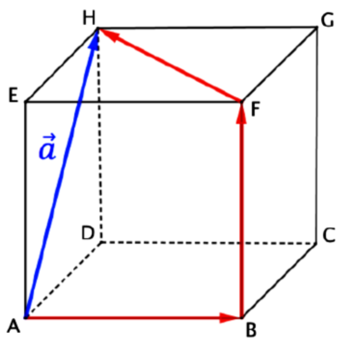
Définition :

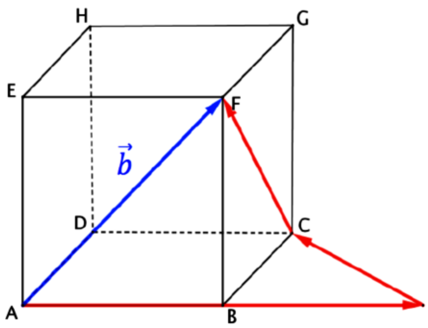
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l’espace. Tout vecteur de la forme $a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + c\,\vec{w}$, avec $a$, $b$ et $c$ réels, est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

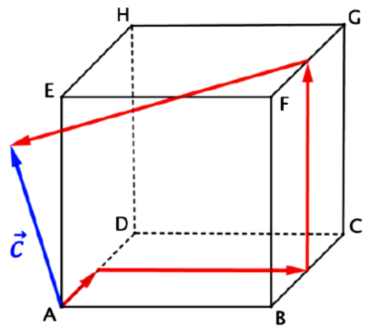
Méthode : représenter et exprimer une combinaison linéaire

- Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous, on a représenté les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ donnés par :

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FH}$ $\quad$ $\vec{b} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}$ $\quad$ $\vec{c} = 0.5\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AC}$

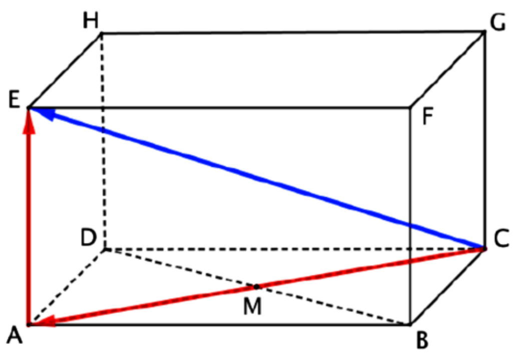


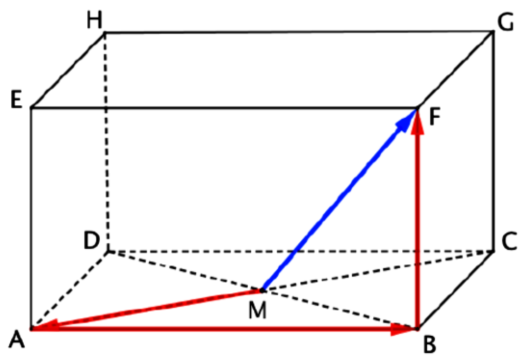




**Vidéo :** [représenter une combinaison linéaire de vecteurs dans l'espace]

- Dans le parallélépipède ci-contre, $M$ est le centre du rectangle $ABCD$.
  Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{MF}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.




$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AE}$




$\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$

**Vidéo :** [exprimer une combinaison linéaire de vecteurs dans l'espace]

# E) Droites et plans de l'espace.

## 1. Vecteurs colinéaires.

Définition : Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, si et seulement si, il existe un réel $k$ tel que :

$$\vec{u} = k\,\vec{v}$$

Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur de l'espace.

## 2. Vecteurs directeurs d'une droite.

Définition :

On appelle vecteur directeur d'une droite $d$ tout vecteur non nul qui a la même direction que $d$.

Propriétés : caractérisation d'une droite

Soit $A$ un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace. La droite $d$ passant par $A$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points $M$ tels $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires et donc :

$$\overrightarrow{AM} = k\vec{u} \quad \text{avec } k \text{ un nombre réel.}$$

Propriété :

Deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

## 3. Direction d'un plan.

Propriété :

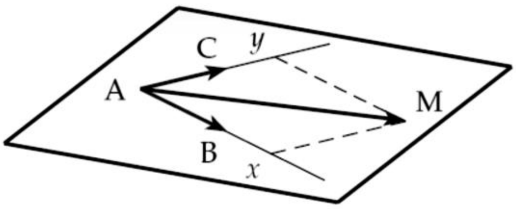
Deux vecteurs non nuls et non colinéaires déterminent la direction d'un plan.

Propriété : caractérisation d'un plan

$A$, $B$ et $C$ étant trois points non alignés de l'espace, le plan $(ABC)$ est l'ensemble des points $M$ de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \quad \text{avec } x \text{ et } y \text{ deux nombres réels.}$$

On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dirigent le plan $(ABC)$.




*Remarques :*

- *Dans ces conditions, le triplet $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$ est un repère du plan.*
- *Un plan est donc totalement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.*

Propriété :

Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.
Pour démontrer que deux plans sont parallèles, il suffit de montrer que deux vecteurs non colinéaires de l'un sont respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de l'autre.

**Vidéo :** démontrer que deux plans sont parallèles avec des vecteurs

## F) **Base et repère dans l'espace.**

Propriété : Vecteurs coplanaires

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont coplanaires, s'il existe un couple de réels $(x\,;y)$ tel que :

$$\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$$

Méthode : démontrer que des points sont coplanaires.

On considère un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$ de l'espace. Démontrer que les points $A(1\,;2\,;0)$, $B(-1\,;1\,;1)$, $C(1\,;4\,;1)$ et $D(3\,;-1\,;-3)$ sont coplanaires.

On va donc chercher à écrire le vecteur $\overrightarrow{AD}$ comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels tels que : $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.

Comme $\overrightarrow{AB}(-2\,;-1\,;1)$ , $\overrightarrow{AC}(0\,;2\,;1)$ et $\overrightarrow{AD}(2\,;-3\,;-3)$, on obtient le système :

$$\begin{cases} 2 = -2\alpha \\ -3 = -\alpha + 2\beta \\ -3 = \alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -2 \\ \alpha + \beta = -3 \end{cases}$$

Les deux valeurs satisfaisant la dernière équation, on a : $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AD}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ donc $A$, $B$, $C$ et $D$ sont coplanaires.

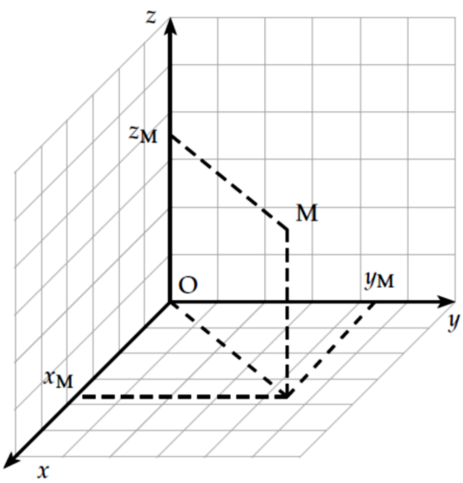
**Vidéo :** démontrer que 4 points sont coplanaires

Définition :

Si $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires de l'espace alors $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$ est une base de l'espace.

Théorème :

- Un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$ dans l'espace est constitué :
  - d'un point origine $O$
  - de trois vecteurs non coplanaires : $\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.
- Tout point $M$ de l'espace est alors défini par :
  $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ avec $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$.
- Les trois réels uniques $(x\,;y\,;z)$ sont appelés coordonnées du point $M$ dans $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$.
  $x$ est l'abscisse , $y$ est l'ordonnée et $z$ est la cote.
- Le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$ est dit orthonormal, si et seulement si, les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$.




**Vidéo :** reconnaître une base de l'espace

**Vidéo :** lire les coordonnées dans l'espace

Propriétés :

Dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$, soit $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$, on a alors :

- les coordonnées du vecteur :
  $$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;y_B - y_A\,;z_B - z_A)$$
- le milieu $K$ de $[AB]$ a pour coordonnées :
  $$K\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\frac{y_A + y_B}{2}\,;\frac{z_A + z_B}{2}\right)$$
- si de plus $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$ est orthonormé :
  $$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

## G) Représentation paramétrique d'une droite.

Propriété :

Dans un repère $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère la droite $d$ passant par $A(x_A\ ; y_A\ ; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha\ ;\ \beta\ ;\ \gamma)$.
$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in d$, si et seulement si, il existe un réel $t$ tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha \times t \\ y = y_A + \beta \times t \\ z = z_A + \gamma \times t \end{cases}$$

Démonstration :

$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in d$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel $t$ tel que : $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$. Cela se traduit en termes de coordonnées par :

$$\begin{cases} x - x_A = \alpha \times t \\ y - y_A = \beta \times t \\ z - z_A = \gamma \times t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + \alpha \times t \\ y = y_A + \beta \times t \\ z = z_A + \gamma \times t \end{cases}$$

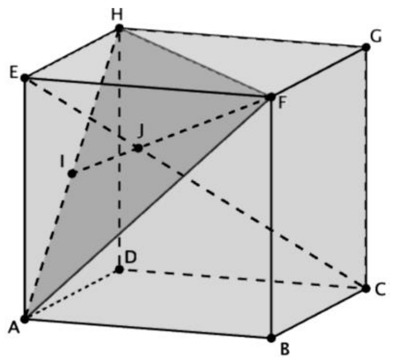
Définition :

Le système d'équations :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha \times t \\ y = y_A + \beta \times t \\ z = z_A + \gamma \times t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

est une **représentation paramétrique** de la droite $d$ passant par $A(x_A\ ; y_A\ ; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha\ ;\ \beta\ ;\ \gamma)$.

**Vidéo :** utiliser la représentation paramétrique d'une droite




Méthode : démontrer l'alignement par décomposition

$ABCDEFGH$ est un cube.
Soit $I$ le milieu de $[AH]$ et $J$ le point de $[FI]$ tel que :

$$\overrightarrow{FJ} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{FI}$$

Démontrer que les points $E$, $J$ et $C$ sont alignés.
Pour prouver cet alignement, on va démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont non coplanaires donc il est possible de décomposer les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right)$ :

- $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$
- $\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FJ}$

$$\begin{aligned}
&= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FI} \\
&= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}\right) \\
&= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right) \\
&= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right) \\
&= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EH} \\
&= \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}
\end{aligned}$$

- Donc $\overrightarrow{EJ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{EC}$

Les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ étant colinéaires, les points $E$, $J$ et $C$ sont alignés.

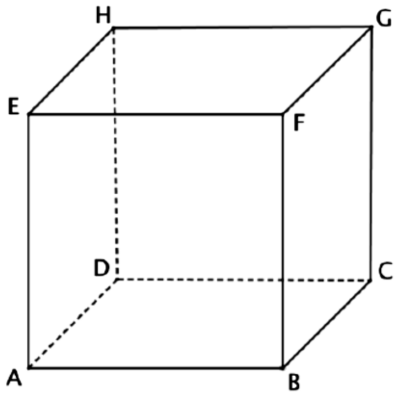
**Vidéo :** décomposer un vecteur dans une base pour démontrer l'alignement

<u>Exercice n°1</u> :

Choisir la ou les bonnes réponses.

Dans un cube $ABCDEFGH$,

1) les droites $(CD)$ et $(EH)$ sont :
   a) sécantes.
   b) parallèles.
   c) non coplanaires.
2) la droite $(CD)$ et le plan $(AFH)$ sont :
   a) sécants.
   b) parallèles.
   c) $(CD)$ est incluse dans $(AFH)$.
3) les plans $(CFH)$ et $(ABD)$ sont :
   a) sécants.
   b) parallèles.
   c) confondus.
4) les plans $(FCH)$ et $(BDE)$ sont :
   a) sécants.
   b) parallèles.
   c) confondus.




<u>Exercice n°2</u> : Equations paramétriques d'une droite

1) Soit $\Delta$ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = 4t \\ z = 2t - 1 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

   a) Donner un vecteur directeur de la droite $\Delta$ et un point de $\Delta$.
   b) Le point $M(-3\,;4\,;-3)$ appartient-il à la droite $\Delta$ ?
   c) Donner les coordonnées de trois points de $\Delta$.
   d) Déterminer une autre représentation paramétrique de la droite $\Delta$.
2) Soient $A(-4\,;1\,;2)$ et $B(-1\,;2\,;5)$.
   Donner une représentation paramétrique de chacun des objets géométriques suivants :
   a) La droite $(AB)$.
   b) Le segment $[AB]$.
   c) La demi-droite $[AB)$.

<u>Exercice n°3</u> :

Soient $A(-4\,;1\,;2)$ ; $B(-1\,;2\,;5)$ et $C(1\,;0\,;6)$.

1) Vérifier que les points $A$, $B$ et $C$ définissent un plan.
2) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(AB)$.
3) Démontrer que le point $D(-3\,;-4\,;1)$ appartient au plan $(ABC)$.

<u>Exercice n°4</u> :

On considère le cube $ABCDEFGH$ et les points $P$ et $Q$ définis par :

$$\overrightarrow{CP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EG}$$

1) Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2) Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AQ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$.
3) Que peut-on en déduire pour les points $A$, $P$ et $Q$ ?
4) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{PC}$ ne forment pas une base de l'espace.

Exercice n°5 : Bac *S* Asie 2013 et Amérique du Sud 2012

*Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, et proposer une démonstration de la réponse indiquée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.*

Dans les deux questions suivantes, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k}\right)$.

1) Soit $S$ le point de coordonnées $(1\ ;3\ ;5)$ et $\Delta_1$ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5 - 4t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

**Affirmation 1** : la droite $\Delta_2$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -t' \\ y = 7 + 4t' \\ z = 7 + 2t' \end{cases} \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}$$

est la droite parallèle à la droite $\Delta_1$ passant par le point $S$.

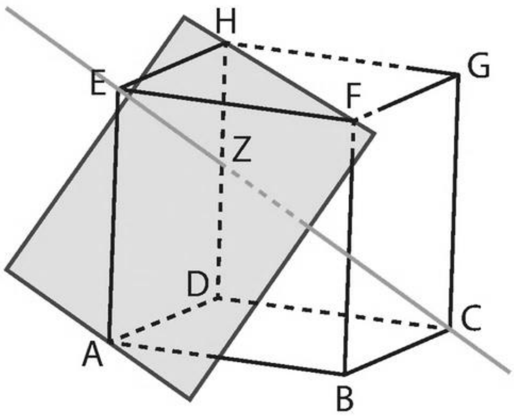
2) On considère les points $I(1\ ;0\ ;0)$, $J(0\ ;1\ ;0)$ et $K(0\ ;0\ ;1)$.
**Affirmation 2** : la droite $\Delta$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 - t'' \\ y = 6 - 2t'' \\ z = -2 + t'' \end{cases} \quad \text{où } t'' \in \mathbb{R}$$

coupe le plan $(IJK)$ au point $E(-0{,}5\ ;1\ ;0{,}5)$.

Exercice n°6 :

Dans le cube $ABCDEFGH$, on note $Z$ le point d'intersections du plan $(AFH)$ et de la droite $(CE)$.
On se place dans le repère $\left(D\ ;\ \overrightarrow{DA}\ ;\ \overrightarrow{DC}\ ;\ \overrightarrow{DH}\right)$.




1) Justifier qu'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que :

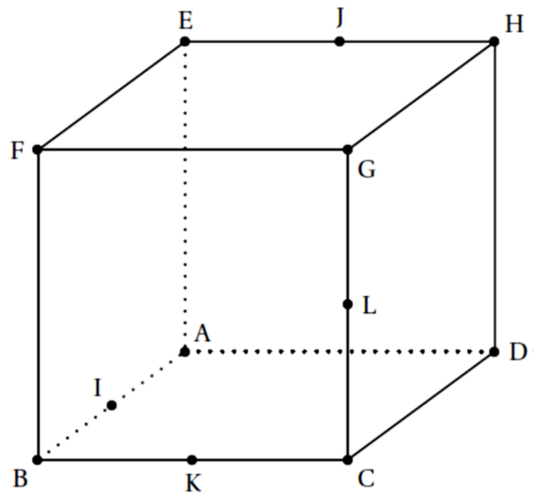
$$\overrightarrow{AZ} = a\overrightarrow{AF} + b\overrightarrow{AH}$$

2) Donner les coordonnées du point $Z$ en fonction des réels $a$ et $b$.
3) Déterminer une équation paramétrique de la droite $(CE)$.
4) En déduire les coordonnées de $Z$.

Exercice n°7 : Bac $S$ Liban 2015

$ABCDEFGH$ est un cube représenté ci-dessous :

- $I$ est le milieu du segment $[AB]$ ;
- $J$ est le milieu du segment $[EH]$ ;
- $K$ est le milieu du segment $[BC]$ ;
- $L$ est le milieu du segment $[CG]$.



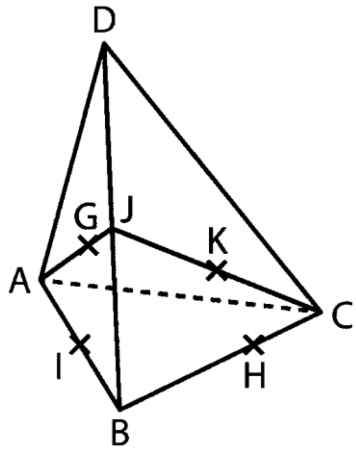

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right)$.

1) Déterminer la nature du triangle $IJK$ et calculer son aire.
2) Déterminer une représentation paramétrique des droites $(IJ)$ et $(KL)$.
3) Les droites $(IJ)$ et $(KL)$ sont-elles sécantes ?

Exercice n°8 :

On considère un tétraèdre $ABCD$, points $I$, $J$ et $K$ milieux respectifs de $[AB]$, $[BD]$ et $[CJ]$ et les points $G$ et $H$ définis par :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

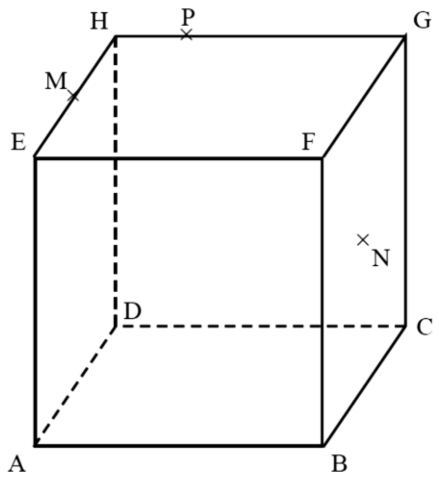



On considère le repère $\left(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BD}\ ;\ \overrightarrow{BA}\right)$.

1) Déterminer les coordonnées des points de la figure.
2) Justifier qu'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que : $\overrightarrow{IK} = a\overrightarrow{IG} + b\overrightarrow{IH}$.
3) Que peut-on en déduire pour les points $G$, $H$, $I$ et $K$ ?
4) Déterminer une représentation paramétrique des droites $(IG)$ et $(HK)$.
5) Déterminer les positions relatives de $(IG)$ et $(HK)$.

Exercice n°9 : Bac $S$ Amérique du Nord 2014

On considère un cube $ABCDEFGH$ donné ci-après.




On note $M$ le milieu du segment $[EH]$, $N$ celui de $[FC]$ et $P$ le point tel que :

$$\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$$

**Partie A : Section du cube par le plan $(MNP)$**

1) Justifier que les droites $(MP)$ et $(FG)$ sont sécantes en un point $L$. Construire le point $L$.
2) On admet que les droites $(LN)$ et $(CG)$ sont sécantes et on note $T$ leur point d'intersection.
   On admet que les droites $(LN)$ et $(BF)$ sont sécantes et on note $Q$ leur point d'intersection.
   a) Construire les points $T$ et $Q$ en laissant apparents les traits de construction.
   b) Construire l'intersection des plans $(MNP)$ et $(ABF)$.
3) En déduire une construction de la section du cube par le plan $(MNP)$.

**Partie B :**

L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1) Donner les coordonnées des points $M$, $N$ et $P$ dans ce repère.
2) Déterminer les coordonnées du point $L$.
3) On admet que le point $T$ a pour coordonnées :

$$T\left(1\,;1\,;\frac{5}{8}\right)$$

   $TNP$ est-il rectangle en $T$ ?

Exercice n°10 : Positions relatives de deux droites

Soit $\Delta$ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = -5 - 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

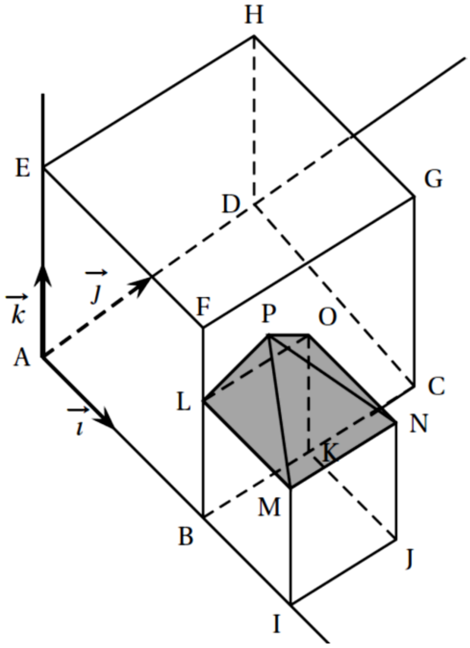
Etudier la position de la droite $\Delta$ avec les droites $d_1$, $d_2$ et $d_3$ de représentation paramétrique :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = 7 - 6k \\ z = -3 + 3k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R} \quad d_2 : \begin{cases} x = 1 - h \\ y = 4 + h \\ z = 2 + 3h \end{cases} \text{ avec } h \in \mathbb{R} \quad d_3 : \begin{cases} x = 9 + p \\ y = -9 - 2p \\ z = 5 + p \end{cases} \text{ avec } p \in \mathbb{R}.$$

Exercice n°11 : Bac Spécialité Métropole 2023

La figure ci-dessous correspond à la maquette d'un projet architectural.

Il s'agit d'une maison de forme cubique ($ABCDEFGH$) accolée à un garage de forme cubique ($BIJKLMNO$) où $L$ est le milieu du segment $[BF]$ et $K$ est le milieu du segment $[BC]$. Le garage est surmonté d'un toit de forme pyramidale ($LMNOP$) de base carrée $LMNO$ et de sommet $P$ positionné sur la façade de la maison.



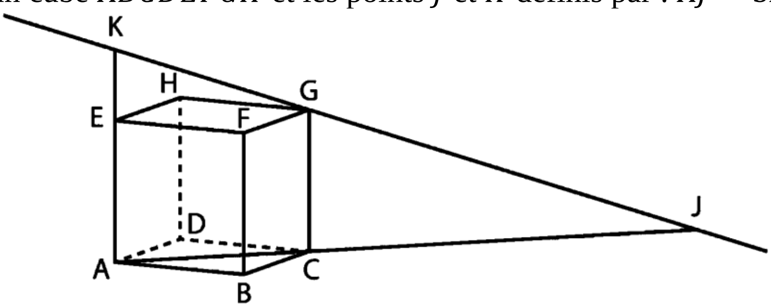

On munit l'espace du repère orthonormé $(A\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$ avec :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \qquad \vec{\jmath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \qquad \vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

1) Par lecture graphique, donner les coordonnées des points $H$, $M$ et $N$.
2) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(HM)$.
3) L'architecte place le point $P$ à l'intersection de la droite $(HM)$ et du plan $(BCF)$.
   Montrer que les coordonnées de $P$ sont :
$$P\left(2\ ;\frac{2}{3}\ ;\frac{4}{3}\right)$$
4) Justifier que les droites $(HM)$ et $(EN)$ sont sécantes.
   Quel est leur point d'intersection ?

Exercice n°12 :

On considère un cube $ABCDEFGH$ et les points $J$ et $K$ définis par : $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AK} = 1{,}5\overrightarrow{AE}$




1) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2) En déduire que les point $J$, $K$ et $G$ sont alignés.
3) On considère le repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE})$.
   a) Déterminer les coordonnées de $J$ et $K$.
   b) Donner une représentation paramétrique de $(JK)$.
   c) Vérifier que $G$ appartient à $(JK)$.

Exercice n°13 :

On considère les droites $d$ et $d'$ de représentations paramétriques suivantes :

$$d : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - k \\ z = 4 - 3k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d' : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 + 4t \\ z = 1 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

1) Montrer que les droites $d$ et $d'$ sont sécantes en un point $A$ dont on donnera les coordonnées.
2) Justifier que le point $B(3\,;\,-7\,;2)$ n'appartient pas au plan défini par $d$ et $d'$.
3) A tout point $M$ de la droite $d'$, on associe la fonction définie par :
$$f(t) = BM^2$$
   a) Exprimer $f(t)$ en fonction du paramètre $t$.
   b) Déterminer la valeur $t_0$ pour laquelle cette fonction admet un minimum.
   c) Donner les coordonnées du point $M_0$ de $d'$.
   d) Que représente $M_0$ ?

Exercice n°14 :

On considère un tétraèdre $ABCD$ et les points $M$, $N$ et $P$ définis par :

$$\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 1{,}5\overrightarrow{AD}$$

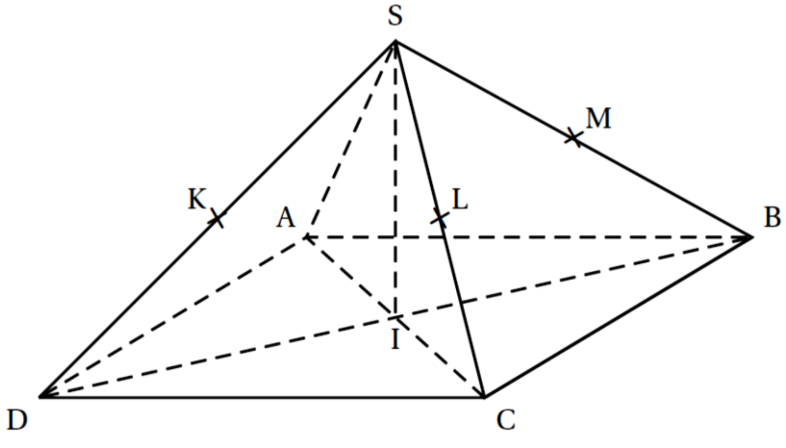
1) Démontrer que :
$$\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 1{,}5\overrightarrow{AD}$$
2) Exprimer de même le vecteur $\overrightarrow{NP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3) En déduire que les points $M$, $N$ et $P$ sont alignés.
4) Donner les coordonnées des points $M$, $N$ et $P$ dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AD}\right)$.
5) Donner une représentation paramétrique de la droite $(MN)$.
6) Vérifier, à l'aide des deux questions précédentes, que $P$ appartient à la droite $(MN)$.

Exercice n°15 : énoncé et corrigé dans la vidéo.

**Vidéo :** Décomposer un vecteur dans un base pour démontrer l'alignement (dans le plan)

Exercice n°16 : QCM noté sur le chapitre à faire sur Pronote.

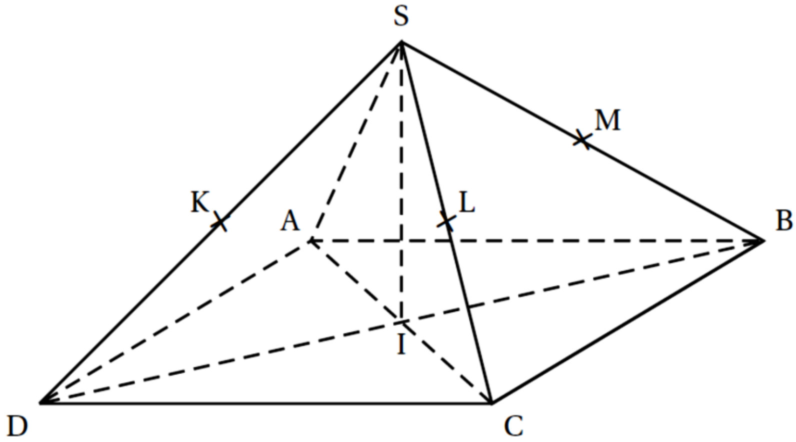
$SABCD$ est une pyramide régulière à base carrée $ABCD$ les arêtes ont la même longueur.
Le point $I$ est le centre du carré $ABCD$.
On suppose que : $IC = IB = IS = 1$.
Les points $K$, $L$ et $M$ sont les milieux respectifs des arêtes $[SD]$, $[SC]$ et $[SB]$.




1) Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

| | |
|---|---|
| a) $(DK)$ et $(SD)$ | b) $(AS)$ et $(IC)$ |
| c) $(AC)$ et $(SB)$ | d) $(LM)$ et $(AD)$ |

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(I\ ;\ \overrightarrow{IC}\ ;\ \overrightarrow{IB}\ ;\ \overrightarrow{IS}\right)$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :
$I(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ ; $A(-1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ ; $B(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$ ; $C(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ ; $D(0\ ;\ -1\ ;\ 0)$ ; $S(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$.




2) Les coordonnées du milieu $N$ de $[KL]$ sont :

a) $\left(\frac{1}{4}\ ;\frac{1}{4}\ ;\frac{1}{4}\right)$  b) $\left(\frac{1}{4}\ ;-\frac{1}{4}\ ;\frac{1}{2}\right)$

c) $\left(-\frac{1}{4}\ ;\frac{1}{4}\ ;\frac{1}{2}\right)$  d) $\left(-\frac{1}{2}\ ;\frac{1}{2}\ ;1\right)$

3) On coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AS}$ sont :

a) $(1\ ;1\ ;0)$  b) $(1\ ;0\ ;1)$

c) $(2\ ;1\ ;-1)$  d) $(1\ ;1\ ;1)$

4) Une représentation paramétrique de la droite $(AS)$ est :

a) $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$  b) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

c) $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$  d) $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

# H) Approfondissement : ces exercices ne seront pas traités en classe.

Exercice n°1 : Définition du barycentre

Soient $A$ et $B$ deux points distincts de l'espace.

1) Montrer qu'il existe un unique point $K$ tel que :
$$2\overrightarrow{KA} + 5\overrightarrow{KB} = \vec{0}$$
2) Existe-t-il un point $H$ tel que : $3\overrightarrow{HA} - 3\overrightarrow{HB} = \vec{0}$ ?
3) Soit $a$ et $b$ un couple de réels tel que $a + b \neq 0$.
   a) Montrer qu'il existe un unique point $G$ tel que :
   $$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
   On dit alors que $G$ est le barycentre de $(A\,;a)$ et de $(B\,;b)$.
   b) Soit $k$ un réel non nul.
   Montrer que $G$ est aussi le barycentre de $(A\,;ka)$ et de $(B\,;kb)$.

Exercice n°2 : Associativité du barycentre

Soit $a$, $b$ et $c$ trois réels tels que $a + b + c \neq 0$.

On admet qu'il existe un unique point $G$ tel que :
$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$
La démonstration de cette unicité sera à faire dans l'exercice n°4.

Ce point $G$ est appelé barycentre du système de points pondérés $(A\,;a)$, $(B\,;b)$ et $(C\,;c)$.

On considère un triangle $ABC$ et le point $G$ barycentre de $(A\,;2)$, $(B\,;-1)$ et $(C\,;1)$.

1) Soit $K$ le barycentre de $(A\,;2)$ et $(B\,;-1)$. Montrer que :
$$2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GK}$$
2) En déduire que $G$ est le barycentre de $(K\,;1)$ et $(C\,;1)$.

Exercice n°3 : Application de l'associativité du barycentre

On a découvert dans l'exercice précédent la définition de l'associativité du barycentre :
si $a + b \neq 0$ et $a + b + c \neq 0$ alors
$G$ est le barycentre de $(A\,;a)$, $(B\,;b)$ et $(C\,;c)$ $\Leftrightarrow$ $G$ est le barycentre de $(K\,;a+b)$ et $(C\,;c)$
où $K$ est le barycentre de $(A\,;a)$ et $(B\,;b)$.
$ABCD$ est un tétraèdre et $I$, $J$, $K$, $L$, $M$ etr $N$ sont les milieux respectifs des segments :
$[AB]$, $[BC]$, $[AC]$, $[AD]$, $[BD]$ et $[CD]$.
On note $O$ le barycentre de $(A\,;1)$, $(B\,;1)$, $(C\,;1)$ et $(D\,;1)$.
Montrer que $(KM)$, $(JL)$ et $(IN)$ sont concourantes.

Exercice n°4 : Fonction vectorielle de *Leibniz*

Soit $A$, $B$ et $C$ trois points de l'espace et soit $a$, $b$ et $c$ trois réels fixés.

Quel que soit le point $M$ de l'espace, le vecteur $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ ne dépend que de $M$ puisque les autres données sont fixées et on note $\overrightarrow{f(M)}$ ce vecteur.

1) Justifier que $\overrightarrow{f(A)} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$.
2) Soit $N$ un point quelconque de l'espace.
   Donner l'expression de $\overrightarrow{f(N)}$
3) Montrer que $\overrightarrow{f(M)} - \overrightarrow{f(N)} = (a + b + c)\overrightarrow{MN}$.
4) On suppose que $a + b + c = 0$.
   Justifier que : $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(A)}$ pour tout point $M$ de l'espace.
5) On suppose maintenant que $s = a + b + c \neq 0$.
   a) Montrer qu'il existe un unique point $G$ tel que : $\overrightarrow{f(G)} = \vec{0}$.
   b) En déduire que pour tout point $M$ de l'espace : $\overrightarrow{f(M)} = s\overrightarrow{MG}$.