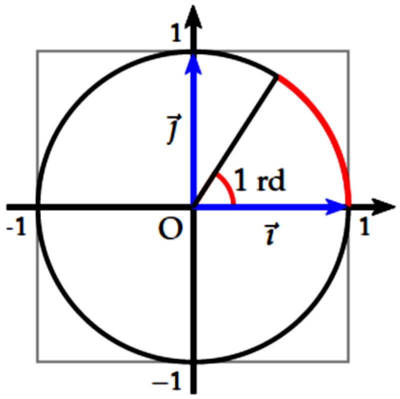
Trigonométrie et angles orientés

A) Angles orientés.

1. Le radian.



Définition :

Le radian est une unité de mesure d'un angle comme le degré.
Il est défini comme la longueur de l'arc entre deux points du cercle unité représenté ci-contre.
Le demi-cercle unité a une longueur de π, il correspond donc à un angle de π radian. On a alors : $180° = \pi\ rad$

La mesure en degré de 1 radian vaut donc : $1\ rad = \dfrac{180}{\pi} \approx 57°$.

Propriété :

Les mesures, en degrés et en radians, d'un angle géométrique sont proportionnelles.

Méthode de conversion :

Mesure en degrés	180	d
Mesure en radians	π	α

Ce tableau est un tableau de proportionnalité donc on a les relations : $\pi d = 180\alpha$ ou $\dfrac{\alpha}{\pi} = \dfrac{d}{180}$.

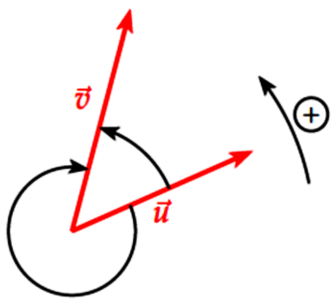
2. Plan et angles orientés.

Définition :

On appelle « plan orienté », un plan dans lequel on a, par convention, défini un sens positif de « parcours » des angles.
On parle alors de « sens direct » quand le sens positif est contraire à celui des aiguilles d'une montre et de « sens indirect » dans le cas contraire.

Définition :

Un angle orienté est défini par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $(\vec{u}\ ;\vec{v})$.
L'angle est alors orienté de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$.



Ci-dessus, on a représenté deux angles orientés, représentant le même angle $(\vec{u}\ ;\vec{v})$.
Le premier est orienté dans le sens direct et l'autre dans le sens indirect.

3. Mesure d'un angle, en radian, d'un angle orienté.

Pour mesurer un angle orienté, il faut une unité (degré ou radian) et un sens de parcours. Un même angle peut avoir des mesures différentes, comme dans la figure précédente. Ces mesures sont alors égales à 2π près, on dit alors qu'elles sont égales « modulo 2π ».

Définition :

On dit que les mesures (en radian) θ_1 et θ_2 d'un même angle orienté $(\vec{u}\ ;\vec{v})$ sont égales modulo 2π, s'il existe un entier relatif k tel que :

$$\theta_2 = \theta_1 + k \times 2\pi \quad \text{on écrit alors} \quad \theta_2 = \theta_1\ (2\pi).$$

Exemple : $-\frac{5\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}\ (2\pi)$ car $-\frac{5\pi}{3} + 2\times 2\pi = -\frac{5\pi}{3} + 4\pi = \frac{-5\pi + 12\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$.

4. Mesure principale d'un angle orienté.

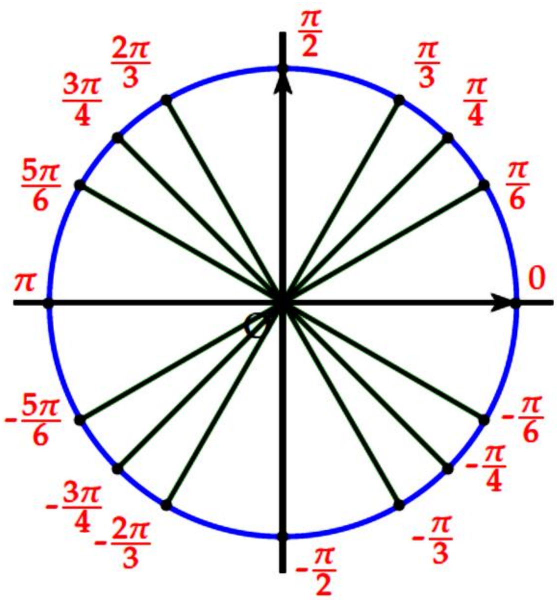
Définition :

On appelle mesure principale d'un angle orienté $(\vec{u}\ ;\vec{v})$, la mesure θ avec $\theta \in [-\pi\ ;\pi[$.

Exemples :

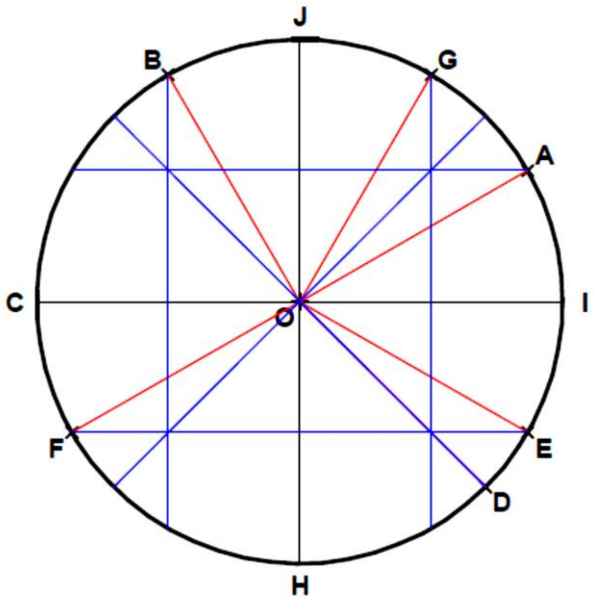
- Reprenons l'angle précédent, la mesure principale de $(\vec{u}\ ;\vec{v}) = -\frac{5\pi}{3}$ est $\frac{\pi}{3}$.

  En effet, on a : $-\frac{5\pi}{3} + 2\pi = \frac{-5\pi + 6\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \in [-\pi\ ;\pi[$.
- Voici ci-dessous le cercle trigonométrique avec tous les angles remarquables exprimés en mesure principale :



Exercice n°1 :

Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, déterminer les réels associés aux points : A, B, C, D, E, F, I et J.



Exercice n°2 :

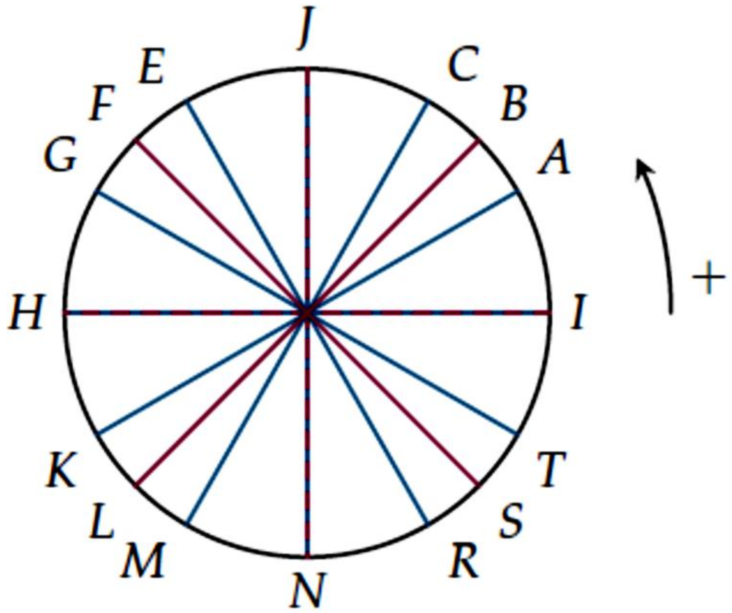
Déterminer la mesure principale des angles de mesures :

1) $-\frac{7\pi}{3}$; $\frac{32\pi}{5}$ et $\frac{8\pi}{111}$.

2) $\frac{59\pi}{8}$; $\frac{19\pi}{13}$ et $-\frac{313\pi}{12}$.

Exercice n°3 :

Associer à chacun de ces dix réels 0 ; $\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{4\pi}{3}$; π ; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{19\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{2}$ un point du cercle trigonométrique ci-dessous :

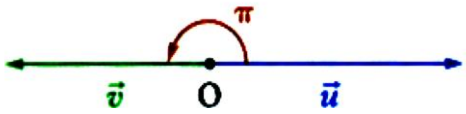


B) Propriétés des angles orientés.

1. Angles plats ou nuls.

Propriété :

- Angle nul : $(\vec{u}\ ;\vec{u}\ ) = 0 \quad (2\pi)$.
- Angle plat : $(-\vec{u}\ ;\vec{u}\ ) = (\vec{u}\ ;-\vec{u}\ ) = \pi \quad (2\pi)$.



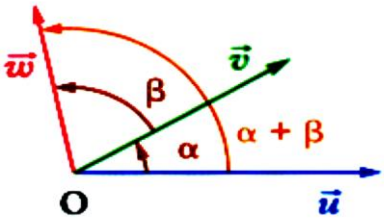
2. Relation de Chasles.

Propriété :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls, on a alors:

$(\vec{u}\ ;\vec{v}\ ) + (\vec{v}\ ;\vec{w}\ ) = \alpha + \beta \quad (2\pi)$.

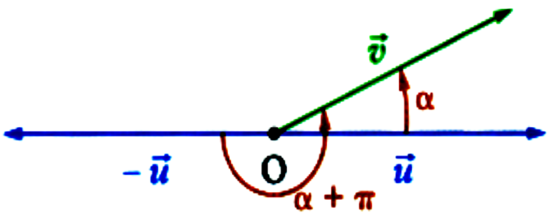
$= (\vec{u}\ ;\vec{w}\ ) \quad (2\pi)$.

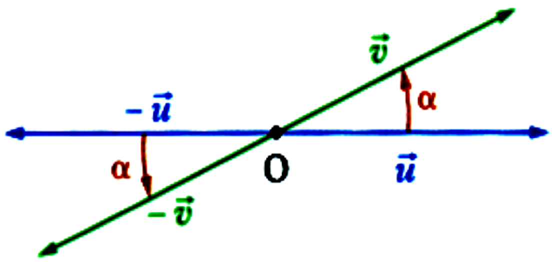


3. Règles des signes.

Propriétés :

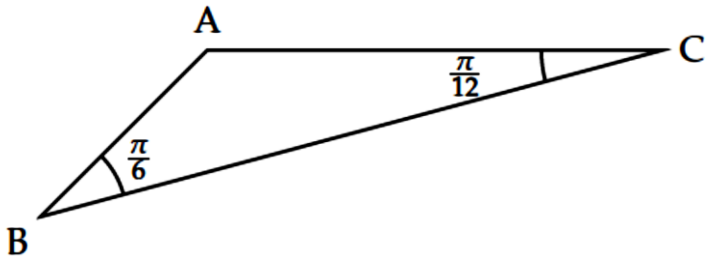
- $(\vec{v}\ ;\vec{u}\ ) = -(\vec{u}\ ;\vec{v}\ ) \quad (2\pi)$.
- $(-\vec{u}\ ;-\vec{v}\ ) = (\vec{u}\ ;\vec{v}\ ) \quad (2\pi)$.
- $(-\vec{u}\ ;\vec{v}\ ) = (\vec{u}\ ;-\vec{v}\ ) = (\vec{u}\ ;\vec{v}\ ) + \pi = (\vec{u}\ ;\vec{v}\ ) - \pi \quad (2\pi)$.





Exemple :

Déterminer, à l'aide des propriétés des angles orientés, l'angle $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}\ )$.



- $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}\ ) = (\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{BC}\ ) + (\overrightarrow{BC}\ ;\overrightarrow{AC}\ )$ Relation de Chasles.

  $= [(\overrightarrow{BA}\ ;\overrightarrow{BC}\ ) + \pi\ ] + (\overrightarrow{CB}\ ;\overrightarrow{CA}\ )$ Règles des signes.

  $= -\dfrac{\pi}{6} + \pi - \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{9\pi}{12} = \dfrac{3\pi}{4}$.
- On aurait pu retrouver cet angle de façon "*classique*" en faisant le complément à π :

  $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}\ ) = \pi - \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{3\pi}{4}$.

Exercice n°4 :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que : $(\vec{u}\ ;\vec{v}\,) = -\dfrac{\pi}{9}\ (2\pi)$ et $(\vec{u}\ ;\vec{w}\,) = \dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$.

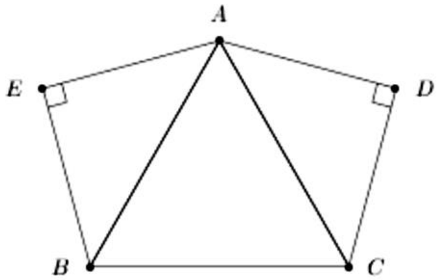
Déterminer la mesure principale des angles :

1) $(\vec{v}\ ;\vec{w})$.
2) $(-\vec{u}\ ;\vec{v}\,)$.
3) $(-2\vec{u}\ ;\vec{w}\,)$.
4) $(2\vec{u}\ ;\vec{v}\,)$.
5) $(-\vec{v}\ ;2\vec{u}\,)$.
6) $(3\vec{v}\ ;-2\vec{u}\,)$.

Exercice n°5 :

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle équilatéral et ADC et AEB sont des triangles rectangles isocèles. Déterminer une mesure des angles orientés ci-dessous :

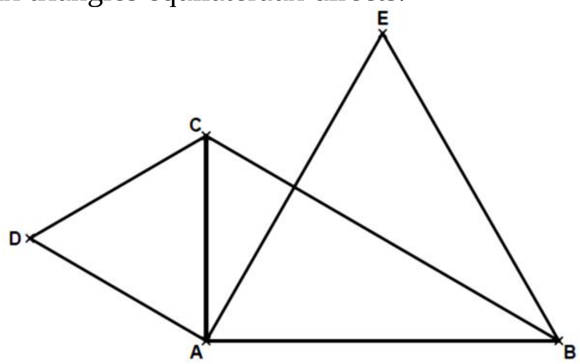
$(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC}\,)$; $(\overrightarrow{DC}\ ;\overrightarrow{DA}\,)$; $(\overrightarrow{EB}\ ;\overrightarrow{EA}\,)$; $(\overrightarrow{CB}\ ;\overrightarrow{CD}\,)$; $(\overrightarrow{AE}\ ;\overrightarrow{AD}\,)$ et $(\overrightarrow{BC}\ ;\overrightarrow{BE}\,)$.



Exercice n°6 :

ABC est un triangle rectangle en A direct tel que BC = 2AC.

ACD et ABE sont deux triangles équilatéraux directs.

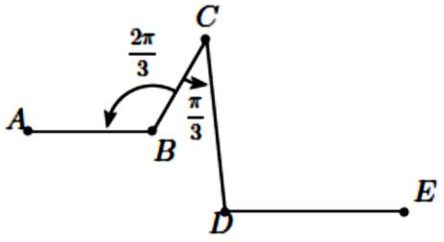


1) Déterminer une mesure en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{CA}\ ;\overrightarrow{CB}\,)$.
2) Donner une mesure en radian des angles orientés :
   a) $(\overrightarrow{AD}\ ;\overrightarrow{AE}\,)$.
   b) $(\overrightarrow{AD}\ ;\overrightarrow{CB}\,)$.
   c) $(\overrightarrow{AE}\ ;\overrightarrow{CB}\,)$.

Exercice n°7 :

Sur la figure ci-dessous les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.

1) Donner la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{DE}\,)$.
2) En utilisant la relation de Chasles, déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{DC}\ ;\overrightarrow{DE}\,)$.



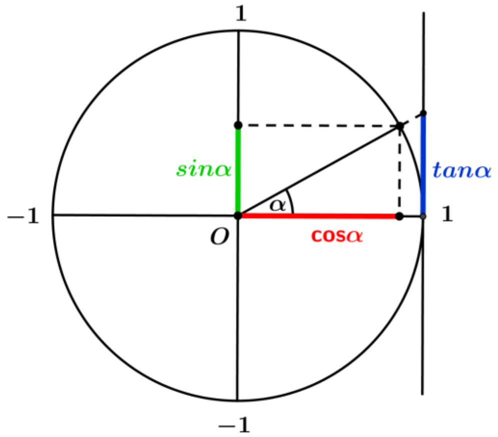
C) Trigonométrie.

1. Définitions et premières propriétés.

Définition :

Dans un repère orthonormal direct, α est l'angle orienté dans le cercle unité, on a alors :

- $\cos\alpha =$ projection de l'angle sur l'axe des abscisses.
- $\sin\alpha =$ projection de l'angle sur l'axe des ordonnées.
- $\tan\alpha =$projection de l'angle sur la droite tangente au cercle.



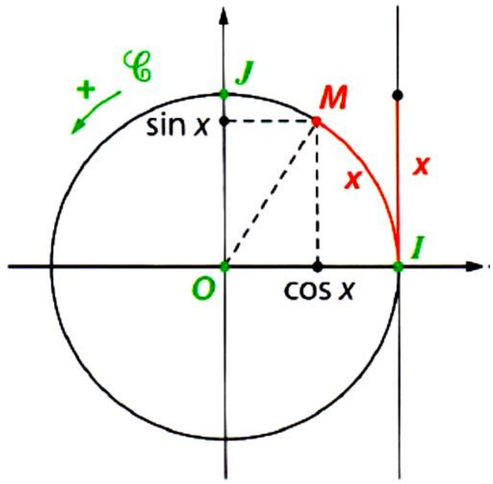
Propriété : Tableau des angles remarquables

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Propriété :

Soit M un point du cercle trigonométrique tel que : $\overset{\frown}{IM} = x$.

Les coordonnées du point M dans le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$ sont : $M(\cos x\,;\,\sin x)$.

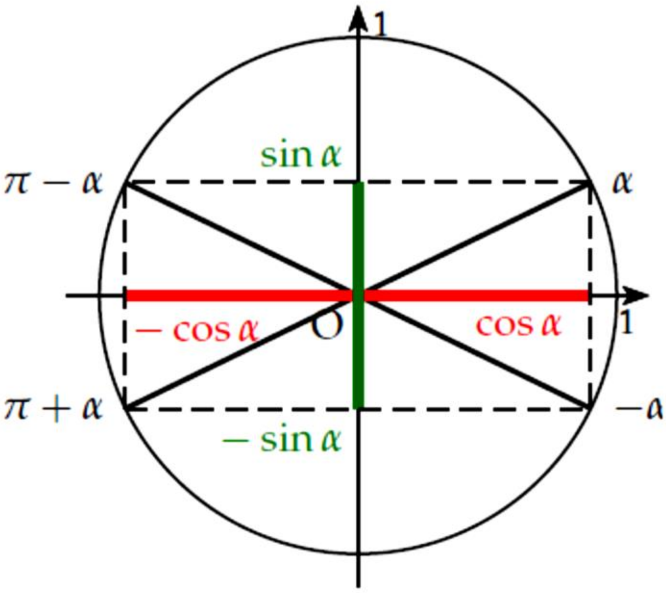


2. Relations trigonométriques de base.

Propriétés :

- On a les encadrements suivants : $\begin{cases} -1 \le \cos x \le 1 \\ -1 \le \sin x \le 1 \end{cases}$.
- On vérifie, avec le théorème de Pythagore, la relation : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- On vérifie, avec le théorème de Thalès, la relation : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
- On a justifié précédemment dans ce chapitre que : $\begin{cases} \cos(x+2k\pi) = \cos x \\ \sin(x+2k\pi) = \sin x \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

3. Relations de symétries.



Propriétés : avec l'angle opposé

Pour tout réel x on a :

- $\cos(-x) = \cos x$.
- $\sin(-x) = -\sin x$.

Propriétés : avec l'angle supplémentaire

Pour tout réel x on a :

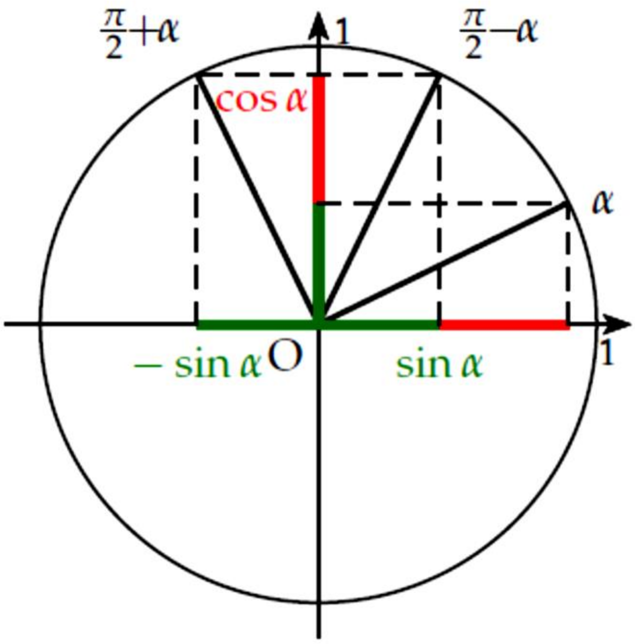
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$.
- $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Propriétés : avec l'angle diamétralement opposé

Pour tout réel x on a :

- $\cos(\pi + x) = -\cos x$.
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$.

4. Relations de déphasage.



Propriétés : avec l'angle complémentaire

Pour tout réel x on a :

- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

Propriétés : d'un quart de tour

Pour tout réel x on a :

- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$.
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.

Exercice n°8 :

Simplifier les expressions suivantes :

$A(x) = \cos(x-\pi) - \sin(-\pi - x) + \cos(\pi + x) - \sin(-x)$.

$B(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4\sin\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) - 5\sin(\pi + x)$.

Exercice n°9 :

1) On sait que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$; $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

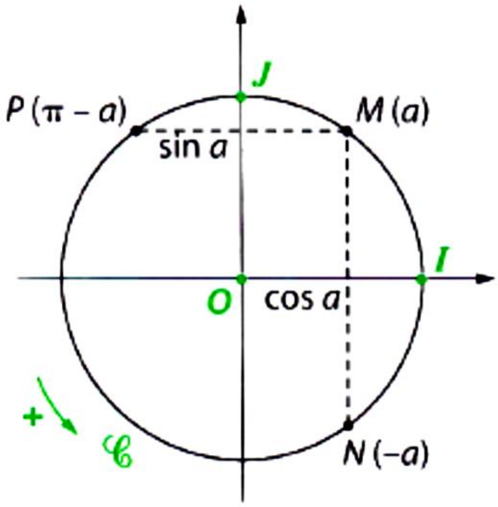
5. Résolution des équations cos *x* = cos *a* et sin *x* = sin *a*.

Propriété : $\cos x = \cos a$

Les solutions, dans ℝ, de l'équation $\cos x = \cos a$ sont les nombres : $\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = -a + 2k\pi \end{cases}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Explications :

Si M est le point du cercle trigonométrique tel que $\overset{\frown}{\mathrm{IM}} = a$. Il existe un autre point du cercle et un seul ayant même abscisse (et donc le même cosinus) que M, c'est le point N symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses et donc tel que $\overset{\frown}{\mathrm{IN}} = -a$.



Propriétés : $\sin x = \sin a$

Les solutions, dans ℝ, de l'équation $\sin x = \sin a$ sont les nombres : $\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Explications :

Si M est le point du cercle trigonométrique tel que $\overset{\frown}{\mathrm{IM}} = a$. Il existe un autre point du cercle et un seul ayant même ordonnée (et donc le même sinus) que M, c'est le point N symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées et donc tel que $\overset{\frown}{\mathrm{IN}} = \pi - a$.

Exercice n°10 :

Résoudre à l'aide d'un cercle trigonométrique, les équations suivantes (on dessinera les solutions sur le cercle trigonométrique) :

1) $\cos x = \frac{1}{2}$ dans $[0\ ;\ 2\pi[$.

2) $\sin x = \frac{1}{2}$ dans $[-\pi\ ;\ \pi[$.

3) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0\ ;\ \pi]$.

4) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0\ ;\ \pi]$

Exercice n°11 :

Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle indiqué à l'aide d'un cercle trigonométrique.

a) $\cos x = 0$ dans $[0\ ;\ 2\pi[$.

b) $\cos(\pi - x) = \frac{1}{2}$ dans $]-\pi\ ;\ \pi]$.

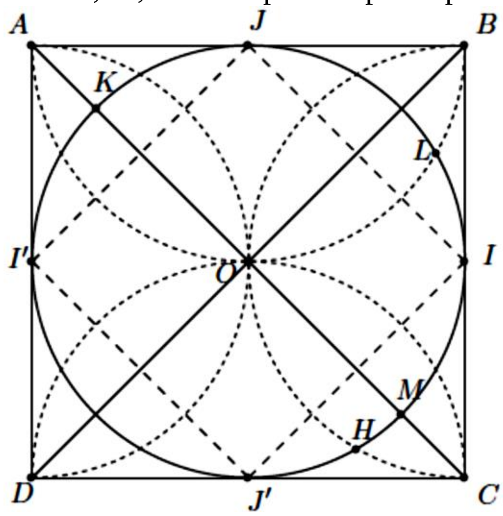
c) $\cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$ dans $[0\ ;\ 2\pi[$.

d) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $]-\pi\ ;\ \pi]$.

e) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $]-\pi\ ;\ \pi]$.

Exercice n°12 :

$(O\ ;\ I\ ;\ J)$ est un repère orthonormé du plan, orienté dans le sens direct. Le carré ABCD est circonscrit au cercle trigonométrique et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{I'I}$. On construit le carré $IJI'J'$ de centre O et les demi-cercles de centres respectifs I, J, I' et J' passant par le point O.



1) Placer sur le cercle trigonométrique donné ci-dessus les points E, F et G associés respectivement aux réels $\frac{-\pi}{6}$; $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{-7\pi}{4}$.

2) Donner les valeurs exactes de $\cos\frac{-5\pi}{3}$ et $\sin\frac{5\pi}{6}$.

3) Déterminer la mesure principale en radian des angles orientés dont on donne une mesure en radian : $\frac{2011\pi}{6}$ et $\frac{-45\pi}{5}$.

4) Déterminer la mesure principale des angles orientés :

a) $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OK})$.

b) $(\overrightarrow{OH}\ ;\ \overrightarrow{OL})$.

c) $(\overrightarrow{OI'}\ ;\ \overrightarrow{OL})$.

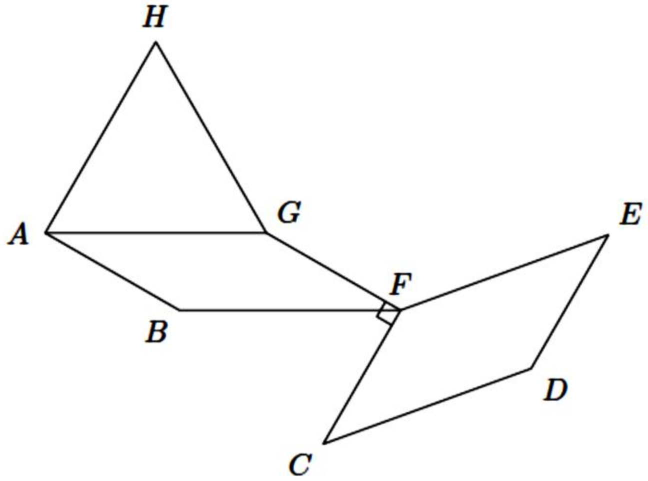
d) $(\overrightarrow{DC}\ ;\ \overrightarrow{IJ})$.

e) $(\overrightarrow{AK}\ ;\ \overrightarrow{BJ})$.

f) $(\overrightarrow{II'}\ ;\ \overrightarrow{DB})$

Exercice n°13 :

Sur la figure ci-dessous, ABFG et CDEF sont deux parallélogrammes et AGH un triangle équilatéral direct tels que : $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AG}) = \frac{\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{FG}\ ;\ \overrightarrow{FC}) = \frac{\pi}{2}$.



1) Donner une mesure de chacun des trois angles suivants :
   a) $(\overrightarrow{AH}\ ;\ \overrightarrow{AG})$.
   b) $(\overrightarrow{AG}\ ;\ \overrightarrow{AB})$.
   c) $(\overrightarrow{GF}\ ;\ \overrightarrow{CF})$.
2) Etablir que $(\overrightarrow{AH}\ ;\ \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$. Que peut-on déduire de ce résultat ?
3) Etablir que $(\overrightarrow{AH}\ ;\ \overrightarrow{FC}) = \pi$. Que peut-on déduire de ce résultat ?

Exercice n°14 :

Sans calculatrice et avec les détails des calculs.

1) Ecrire, en fonction de $\cos x$ et $\sin x$, les expressions suivantes :
   a) $\cos(x-\pi)+\sin(\pi-x)+\cos(\pi+x)-\sin(-x)$.
   b) $\sin x+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos(x)-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.
2) Calculer les expressions suivantes en utilisant les angles associés :
   a) $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin\left(\frac{11\pi}{8}\right)+\sin\left(\frac{13\pi}{8}\right)$.
   b) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+2\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$.
3) Ecrire, en fonction de $\sin x$, l'expression : $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin(-x)+\sin(\pi-x)$.

Exercice n°15 :

En remarquant que cette équation peut se ramener à une équation du second degré, résoudre l'équation trigonométrique suivante (on dessinera les solutions sur le cercle trigonométrique) : $2\sin^2 x-3\sin x-2=0$ dans $[-\pi\ ;\ \pi[$.

D) Formules d'addition et de duplication.

1. Formules d'addition.

Propriétés :

Pour tous réels a et b on a :

$\cos(a-b)=\cos a\times\cos b+\sin a\times\sin b$

$\cos(a+b)=\cos a\times\cos b-\sin a\times\sin b$

$\sin(a-b)=\sin a\times\cos b-\sin b\times\cos a$

$\sin(a+b)=\sin a\times\cos b+\sin b\times\cos a$

2. Formules de duplication.

Propriétés :

Pour tous réels a et b on a :

$\sin 2a=2\sin a\times\cos a$

$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$

$\cos 2a=2\cos^2 a-1$

$\cos 2a=1-2\sin^2 a$

E) Lignes trigonométriques dans le cercle.