Interrogation de mathématiques
Niveau : $1^{\text{ère}}$ S
Durée : 2 heures
Calculatrice : Autorisée
Thème : Dérivation

Trois points seront attribués pour la présentation, le soin et la clarté des explications

<u>Exercice n°1</u> : Calculs de dérivées **(5 pts)**

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :
(On ne demande pas de simplifier l'écriture des fonctions dérivées).

1) $a(x) = 7x^3 + 2x^2 - x + 5$.
2) $b(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + \pi$.
3) $c(x) = x\sqrt{x} + 6$.
4) $d(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{2x+1}$.

<u>Exercice n°2</u> : Nombre dérivé. **(4 pts)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x$ et C_f sa courbe représentative.

1) Montrer que pour tout réel h ($h \neq 0$), on a : $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = h + 3$.
2) En déduire le nombre dérivé de f en 1.
3) En déduire l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

<u>Exercice n°3</u> : **(7 pts)**

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$.

1) La courbe représentative C_f de la fonction f passe par les points : $A(1\,;1)$ et $B(3\,;9)$.
   Déterminer les coefficients a et b.
2) Pour la suite de l'exercice, on admet que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.
   a) Calculer la fonction dérivée de la fonction f.
   b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.
   c) La courbe C_f admet-elle des tangentes parallèles à la droite d'équation $y = 12x + 1$?
   Si tel est le cas, préciser les abscisses de ces points.

<u>Exercice n°4</u> : ROC **(5 pts)**

1) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
   a) Démontrer que : $\left(f^2\right)' = 2 \times f' \times f$.
   On pourra utiliser la formule du produit : $(u \times v)' = u'v + v'u$.
   b) En utilisant les deux résultats précédents, démontrer que : $\left(f^3\right)' = 3 \times f' \times f^2$.
2) On considère la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 5x + 3$.
   Calculer la dérivée de la fonction f^3.

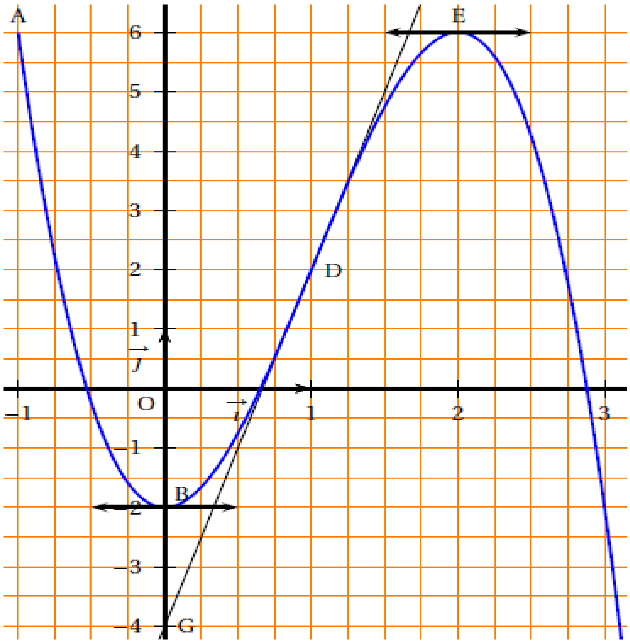
Exercice n°5 : Nombre dérivé et lectures graphiques. **(6 pts)**

La courbe C_f, tracée ci-dessous, représente la fonction f définie et dérivable sur $[-1\ ;\ 4]$.

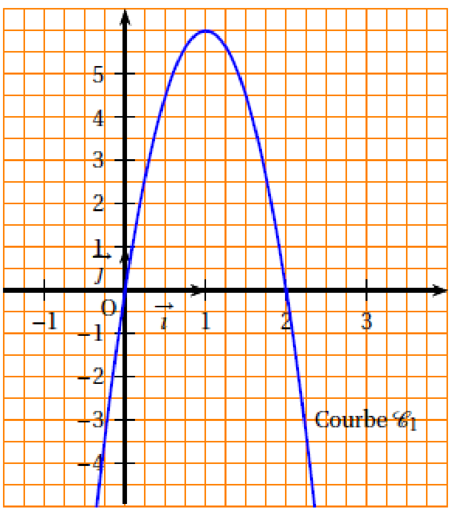
Elle passe par les points $A(-1\ ;\ 6)$, $B(0\ ;\ -2)$, $D(1\ ;\ 2)$ et $E(2\ ;\ 6)$.

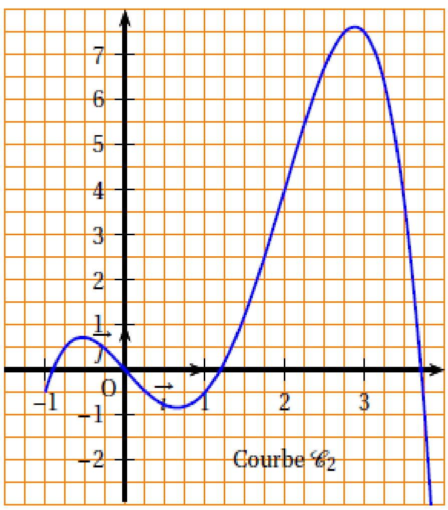
Elle admet au point D une tangente passant par le point $G(0\ ;\ -4)$.

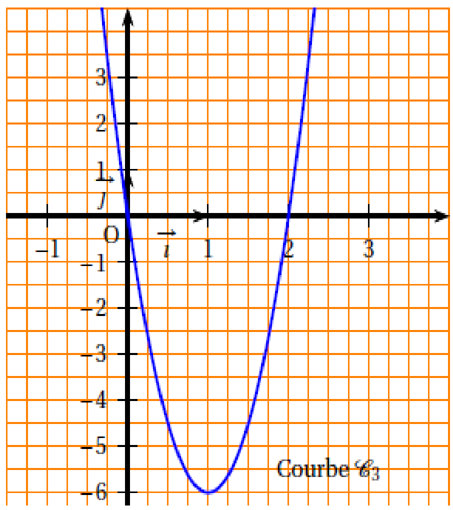
Elle admet au point B et au point E une tangente horizontale.



1) Déterminer, graphiquement, les valeurs de x telles que $f'(x)=0$.
2) Déterminer, en justifiant vos réponses, $f(1)$ et $f'(1)$.
3) Donner, en justifiant votre réponse, le signe de $f'(-0{,}5)$.
4) Dresser le tableau de variations de f.
5) Parmi les courbes C_1, C_2 et C_3, préciser, en justifiant la réponse, celle qui représente f'.







<u>Exercice n°6</u> : Optimisation **(10 pts)**

<u>Partie A :</u>

On considère la fonction S définie sur $x \in \left]0\ ;12\right]$ par : $S(x)=\dfrac{4x^3+216}{x}$.

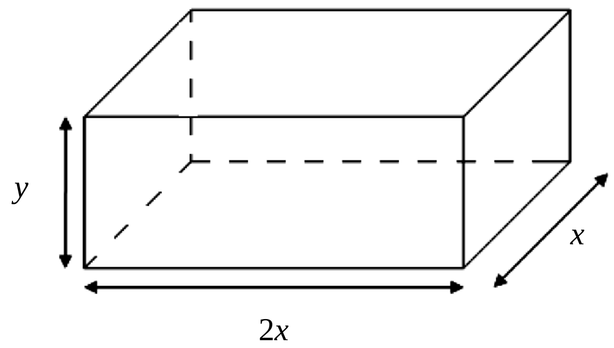
1) Montrer que pour tout $x \in \left]0\ ;12\right]$, on a : $S'(x)=\dfrac{8x^3-216}{x^2}$.
2) On admet que : $8x^3-216=(2x-6)(4x^2+12x+36)$.
   Etudier les variations de S sur $\left]0\ ;12\right]$.

<u>Partie B :</u>

Un laboratoire pharmaceutique fabrique un produit solide conditionné sous la forme d'un petit parallélépipède rectangle dont le volume est $72\,mm^3$. On note :

- y la hauteur et ses autres dimensions sont x et $2x$ (x et y sont en mm).
- $S(x)$ la surface totale (en mm^2) de ce parallélépipède rectangle en fonction de x.

On supposera, dans tout l'exercice, que $x \in \left]0\ ;12\right]$.



1) Montrer que pour tout $x \in \left]0\ ;12\right]$, on a : $y=\dfrac{36}{x^2}$.
2) En déduire que pour tout $x \in \left]0\ ;12\right]$, on a : $S(x)=\dfrac{216}{x}+4x^2$.
3) Montrer que pour tout $x \in \left]0\ ;12\right]$, on a : $S(x)=\dfrac{4x^3+216}{x}$.
4) En déduire les dimensions du parallélépipède pour lesquelles $S(x)$ est minimale.