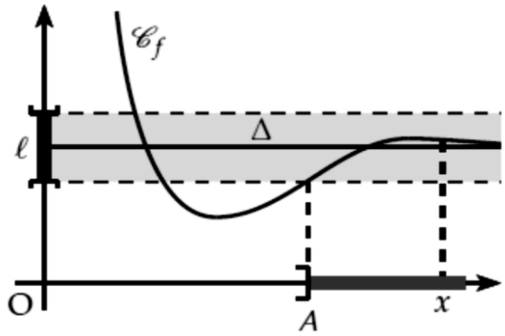
Limites et continuité de fonctions

A) Limites de fonctions.

1. Limite l'infini.

Définition : Limite finie à l'infini

Dire qu'une fonction f a pour limite ℓ en $+\infty$, signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand c'est à dire pour les x d'un intervalle $]A\ ;\ +\infty[$. On note alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.



La droite Δ d'équation $y=\ell$ est dite **asymptote horizontale** à C_f en $+\infty$.

Remarque : On définit de façon analogue $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$ et la droite Δ d'équation $y=\ell$ est alors **asymptote horizontale** à C_f en $-\infty$.

Exemple :

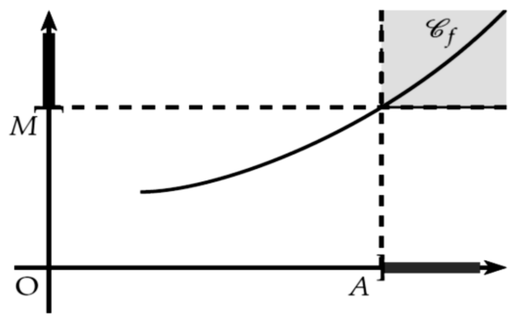
Les fonctions définies par :

$$x\mapsto\frac{1}{x}\quad ;\quad x\mapsto\frac{1}{x^n}\quad \text{et}\quad x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$$

ont des limites nulles en $+\infty$ (et en $-\infty$ pour les deux premières). Leurs courbes admettent l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.

Définition : Limite infinie à l'infini

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, signifie que tout intervalle $]M\ ;\ +\infty[$., contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand c'est à dire pour les x d'un intervalle $]A\ ;\ +\infty[$. On note alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.



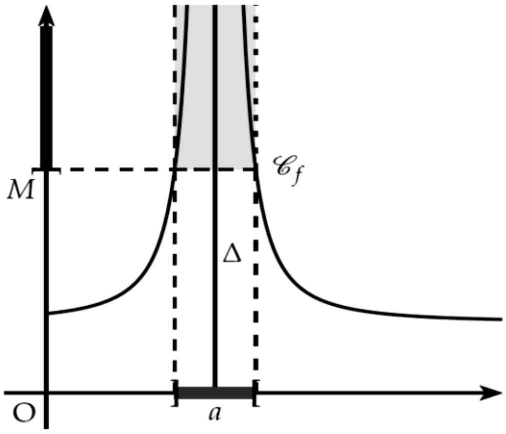
Remarque :

- Cela implique que la fonction f n'est pas majorée.
- On définit de façon analogue : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2. Limite infinie en un point.

Définition :

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a, signifie que tout intervalle $]M\,;\,+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a c'est à dire pour les x d'un intervalle ouvert contenant a. On note alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.



La droite Δ d'équation $x = a$ est dite **asymptote verticale** à C_f.

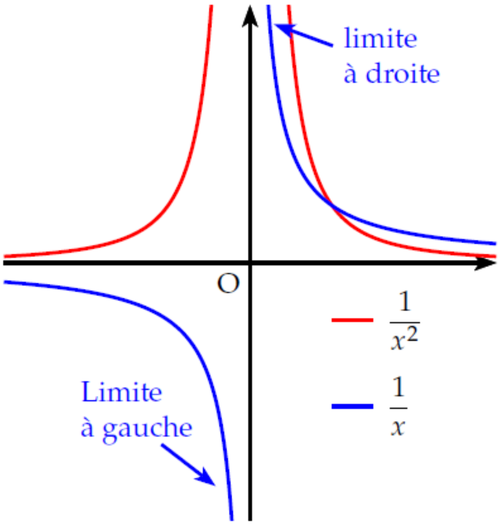
Vidéo : déterminer graphiquement des limites d'une fonction

Remarque :

- On définit de façon analogue $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.
- On peut aussi définir la limite à gauche ou à droite de $x = a$ lorsque la limite en $x = a$ n'existe pas. On notera alors :
  - limite à gauche : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$.
  - limite à droite : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$.

Exemples :

- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ a pour limite 0 en $+\infty$
- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0
  Elle admet en revanche une limite à gauche $(-\infty)$ et à droite $(-\infty)$de 0



3. Limites des fonctions élémentaires.

Propriété : limites en l'infini

$f(x)$	x^n	$\frac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	e^x	$\frac{1}{e^x}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$	0	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	0	non défini	non défini	0	$+\infty$

Propriétés : limites en zéro

$f(x)$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	non défini

4. Opérations sur les limites.

Propriété : somme de fonctions

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si f a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.Ind$

Exemples :

1) Limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = x + 3 + \frac{1}{x}$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} x+3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array}\right\}$$ par somme on obtient donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to-\infty} x+3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array}\right\}$$ par somme on obtient donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2) Limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + x$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{array}\right\}$$ par somme on obtient donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \end{array}\right\}$$ par somme on ne peut pas conclure : forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ».

Propriété : produit de fonctions ($\pm$: appliquer la règle des signes)

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
Si f a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $f \times g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$	$F.Ind$	$\pm\infty$

Vidéo : calculer la limite d'une fonction à l'aide des formules d'opération

Exemples :

1) Limite en $-\infty$ de la fonction précédente : $f(x) = x^2 + x$.
Pour lever la forme indéterminée on factorise par le monôme de plus haut degré :
$$\forall x < 0 \;\; f(x) = x^2 + x = x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = 1 \end{array}\right\} \quad \text{par produit on obtient donc } \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

2) Limite en $+\infty$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$par : $f(x) = x - \sqrt{x}$.
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{par somme on ne peut pas conclure : « } +\infty - \infty \text{ ».}$$
On change alors la forme de $f(x)$ en factorisant :
$$\forall x > 0 \;\; f(x) = x - \sqrt{x} = x\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x}\right) = x\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}\right) = x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 1 \end{array}\right\} \quad \text{par produit on obtient donc } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Vidéo : somme et forme indéterminée

Vidéo : forme indéterminée et quotient

Vidéo : forme indéterminée et racine carrée

Vidéo : forme indéterminée en un nombre

Propriété : quotient de fonctions ($\pm$: appliquer la règle des signes)

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞	∞
Si f a pour limite	$\ell' \neq 0$	0	0	∞	ℓ'	∞
alors $f \div g$ a pour limite	$\ell \div \ell'$	$\pm\infty$	$F.Ind$	0	$\pm\infty$	$F.Ind$

Exemple :

Limite en -2 de la fonction définie sur $\mathbb{R}/\{-2\}$ par :
$$f(x) = \frac{2x - 1}{x + 2}$$
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2} 2x - 1 = -5 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} x + 2 = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to -2^-} x + 2 = 0^- \end{array}\right\} \text{par quotient et avec la règle des signes on obtient donc } \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$$
On en déduit alors une asymptote verticale d'équation : $x = -2$.

Vidéo : démontrer qu'une droite est asymptote horizontale

Vidéo : démontrer qu'une droite est asymptote verticale

5. **Théorèmes des gendarmes et de comparaison.**

Théorème : Théorème des gendarmes

f, g et h sont trois fonctions définies sur l'intervalle $I =]b\,;\,+\infty[$ et ℓ un réel.

1) Si pour tout $x \in I$, on a $g(x) \leq f(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
alors d'après le **théorème de comparaison** on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2) Si pour tout $x \in I$, on a $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$
alors, d'après le **théorème des gendarmes** on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

Remarque : énoncés analogues en $-\infty$ avec $I =]-\infty\,;b[$ et en un réel a avec $I =]a-h\,;a+h[$.

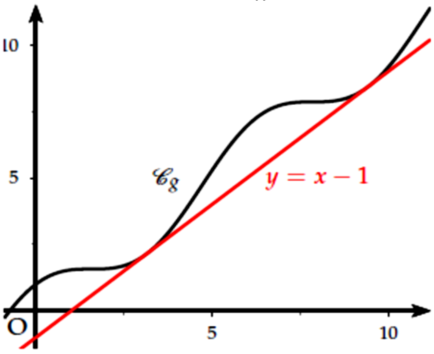
Exemple : déterminer la limite en $+\infty$ de :

$$f(x) = x + \cos x$$

$\forall x \in \mathbb{R}\ \cos x \geq -1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = x + \cos x \geq x - 1$

Or on sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$

D'après le théorème de comparaison, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.



Exemple : déterminer la limite en $+\infty$ de :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

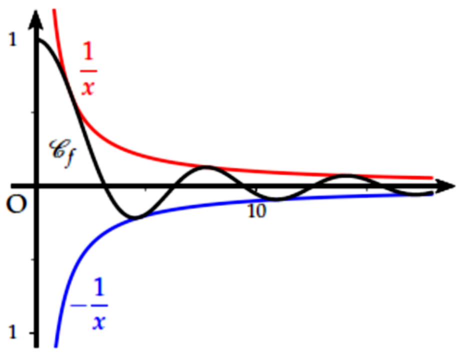
Pour tout réel$x$, on a : $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc :

$$\forall x > 0\ -\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$

Or on sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

D'après le théorème des Gendarmes, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.



Vidéo : calculer la limite d'une fonction à l'aide du théorème de comparaison

Vidéo : calculer une limite à l'aide du théorème d'encadrement

<u>Applications</u> :

Calculer les limites ci-dessous :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-3x+1}{x^2-1}$$

- Nous sommes en présence d'une forme indéterminée.
- Nous allons factoriser par le terme prépondérant au numérateur et au dénominateur :

$$\forall x > 1 \quad \frac{2x^2-3x+1}{x^2-1} = \frac{x^2\left(2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} 2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2} &= 2\\ \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x^2} &= 1\end{aligned}\right\} \text{ par quotient } \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 2$$

On obtient donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-3x+1}{x^2-1} = 2$$

<u>Exercice n°1</u> :

Déterminer les limites ci-dessous :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\frac{1}{x}$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{-7}{\sqrt{x}}+2$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-2-\frac{5}{x}\right)^3$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}+1}{e^x-1}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(1-x)$

6) $\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{2}{(x+1)^2} + 6$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{4-\frac{5}{x^2}}$

8) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{x}{2-x}$

9) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{\sqrt{-x}}$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+3x-5$

11) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{3-2x}$

12) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} 1-\frac{2}{1-x}$

<u>Exercice n°2</u> :

Étudier les limites ci-dessous et préciser les asymptotes éventuelles :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+3x-5$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^3+2x-1}{6x^2-3x+5}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}-e^x$

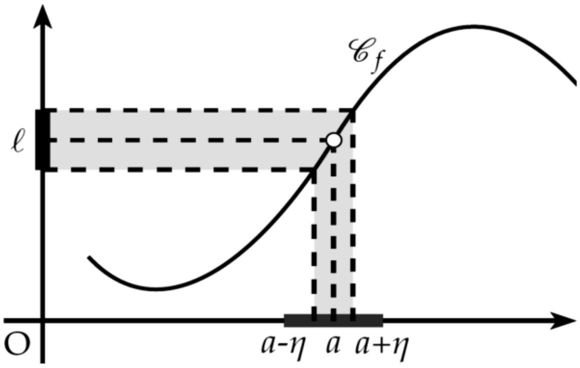
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x^2-1}{x^2+1}}-1$

B) Continuité d'une fonction.

1. Limite finie en un point.

Définition :

Dire qu'une fonction f a pour limite ℓ en a, signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a c'est à dire pour $x \in]a-\eta\,;\,a+\eta[$ $(\eta \in \mathbb{R}^+)$
On note alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.



Remarque : Parfois la fonction f n'admet pas une limite en a, mais admet une limite à droite et une limite à gauche. C'est le cas de la fonction partie entière E. On a par exemple :

$$\lim_{x \to 2^-} E(x) = 1 \quad et \quad \lim_{x \to 2^+} E(x) = 2.$$

2. Continuité en un point.

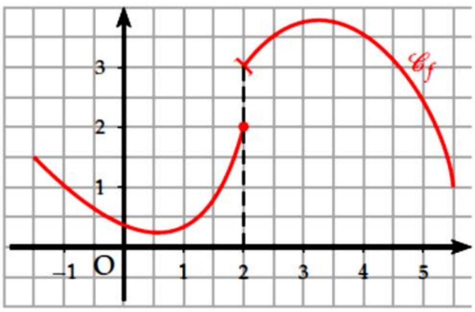
Définition :

Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I. On dit que :

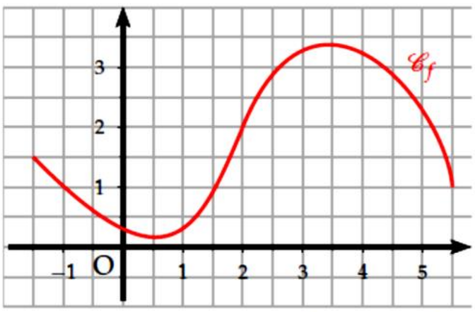
- f est **continue** en a si et seulement si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f est **continue sur** I si et seulement si f est continue en tout point de I.

Remarques :

- *Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par le fait qu'il est possible de tracer sa courbe représentative sans avoir à « lever » le crayon.*
- *Sur les graphiques ci-dessous, la fonction de gauche présente une discontinuité par car il y a un "saut". C'est le cas par exemple de la fonction partie entière ou plus pratiquement de la fonction qui représente les tarifs postaux en fonction du poids (brusque changement de tarif entre les lettres en dessous de 20 g et de celles entre 20 g et 50 g).*



Fonction f discontinue en 2
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3 \neq f(2)$



Fonction f continue sur $[-1,5\,;\,5,5]$

Vidéo : [étudier graphiquement la continuité d'une fonction]

Exemple : fonction définie par morceaux

On considère la fonction ci-dessous définie par morceaux sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 \quad pour \quad x<3 \\ x-4 \quad pour \quad 3 \leq x \leq 5 \\ -2x+13 \quad pour \quad x>5 \end{cases}$$

Les fonctions affines $x \longmapsto -x+2$, $x \longmapsto x-4$ et $x \longmapsto -2x+13$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

- Continuité en 3 ?
  $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} -x+2 = -3+2 = -1$ et $f(3) = 3-4 = -1$
  Donc f est continue en 3 et donc sur $]-\infty\,;5[$.

- Continuité en 5 ?
  $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} -2x+13 = -10+13 = 3$ et $f(5) = 5-4 = 1$
  Donc f n'est pas continue en 5.

- Donc f est continue en 3 et donc sur $]-\infty\,;5[$ et sur $]5\,;+\infty[$.

Vidéo : étudier algébriquement la continuité d'une fonction

3. Continuité des fonctions usuelles.

Propriétés :

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.
- La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.
- Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- D'une façon générale, toutes fonctions construites par opération ou par composition à partir des fonctions ci-dessus sont continues sur leur ensemble de définition, en particulier les fonctions rationnelles.

4. Continuité et dérivabilité.

Propriété : Admis

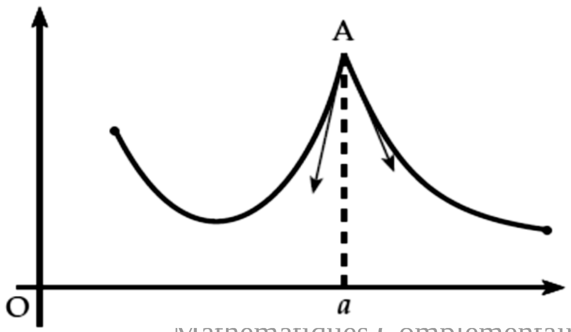
- Si f est dérivable en a alors la fonction f est continue en a.
- Si f est dérivable sur un intervalle I alors la fonction f est continue sur I.

Remarque : la réciproque de ce théorème est fausse. Pour s'en rendre compte, on peut s'appuyer sur une représentation graphique. Si une fonction est continue sur un intervalle, sa représentation graphique est en un seul morceau. Si la fonction est dérivable, sa représentation graphique admet une tangente en chacun de ses points. Un petit exemple :

La fonction dont la représentation est ci-contre, est bien continue en a, car la courbe est en un seul morceau.

Par contre, la fonction n'est pas dérivable en a, car la représentation admet au point A deux demi-tangentes dont les coefficients directeurs sont différents.

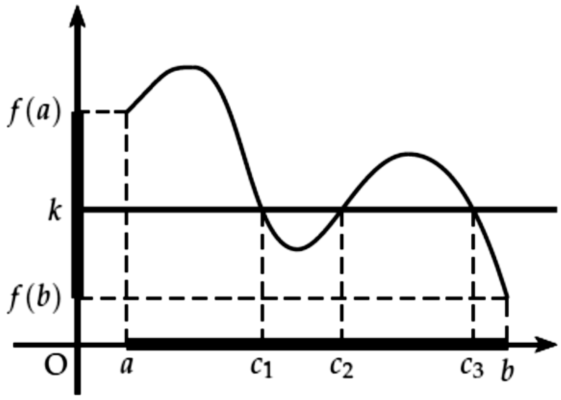
On dit que la courbe admet un point anguleux.



5. **Continuité et équation.**

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f une fonction continue sur $I = [a\,;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in I$ tel que $f(c) = k$.



Dans l'illustration graphique ci-dessus k est bien compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
L'équation $f(x) = k$ admet donc des solutions. Le fait que c existe ne veut pas dire qu'il est unique. Dans notre exemple, il existe ainsi trois valeurs pour c.

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a\,;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $I = [a\,;b]$.

Vidéo : théorème des valeurs intermédiaires

Vidéo : théorème des valeurs intermédiaires bis

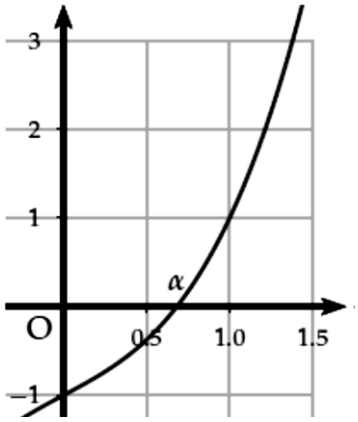
Remarque :

- On généralise ce théorème à l'intervalle ouvert $I =]a\,;b[$.
  k doit alors être compris entre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$.
- Ce théorème est parfois appelé le théorème de la bijection car la fonction réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x - 1$.

- f est continue sur $\mathbb{R}$ car f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car f est la somme de $x \mapsto x^3$ et de $x \mapsto x - 1$ qui sont deux fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}$ (ce résultat peut être obtenu par dérivation).
- $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :
$\exists!\, \alpha \in [0\,;1] / f(\alpha) = 0$.



C) Rappels de première.

1. Dérivées des fonctions usuelles.

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ *n entier non nul*	$f'(x) = n \times x^{n-1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} & si\ n > 0 \\ \mathbb{R}^* & si\ n < 0 \end{cases}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\ ;\ +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

2. Tableau des règles de dérivation.

Dérivée de la somme	$(u+v)' = u' + v'$
Dérivée du produit par un réel	$(ku)' = k \times u'$ $(k \in \mathbb{R})$
Dérivée du produit	$(u \times v)' = u'v + v'u$
Dérivée de l'inverse	$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$
Dérivée du quotient	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
Dérivée de e^u	$(e^u)' = u' \times e^u$

3. Sens de variation & dérivée et équation de la tangente.

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $\forall x \in I, f'(x) > 0$, alors f est croissante sur I.
- Si $\forall x \in I, f'(x) < 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si $\forall x \in I, f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Théorème :

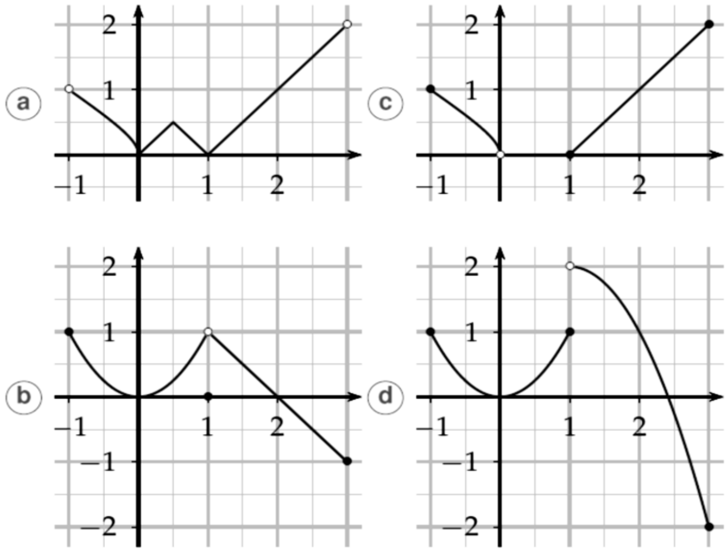
Soit f une fonction dérivable en a et C_f sa courbe représentative.

- $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente T_a à C_f au point d'abscisse a.
- L'équation réduite de la tangente T_a à C_f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exercice n°3 :

Dans chaque repère ci-dessous, la courbe tracée représente une fonction f.
Déterminer les intervalles où f est continue.



Exercice n°4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 4$.

1) Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = -4$.
2) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de f.
3) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4) Donner l'équation réduite de la tangente en 0 à la courbe représentative, C_f, de f.
5) Démontrer que l'équation $f(x) = -13$ admet une unique solution α dont on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

Exercice n°5 :

On considère la fonction f définie sur [0 ; 5] par :

$$f(x) = x^2 + \frac{10}{x+1}$$

1) Montrer que pour tout réel $x \in [0\,;5]$:

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x - 10}{(x+1)^2}$$

2) Soit g la fonction définie sur [0 ; 5] par : $g(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2x - 10$.
   a) Montrer que g est strictement croissante sur [0 ; 5].
   b) Montrer que g s'annule en une seule valeur $\alpha \in [0\,;5]$.
   c) Donner une valeur approchée de α à 0,01 près et en déduire le signe de g sur [0 ; 5].
3) En déduire les variations et dresser le tableau de variations de f sur [0 ; 5].

Exercice n°6 : Bac S Polynésie 2016

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum.
La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = 2te^{-t}$$

1) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2) À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ?
   Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.
3) Donner la limite lorsque t tend vers $+\infty$ de $f(t)$ et préciser l'asymptote éventuelle à C_f.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4) Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture.
   On rappelle que la législation française autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de $0{,}2g \cdot L^{-1}$ pour un jeune conducteur.
   a) Démontrer qu'il existe un unique nombre réel $t_1 \in [0\,;1]$ tel que :
   $$f(t_1) = 0{,}2$$
   b) Donner une valeur approchée à la minute de t_1.
   c) On admet que l'équation $f(t) = 0{,}2$ admet exactement deux solutions t_1 et $t_2 \approx 3{,}577$.
   Quelle durée minimale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ? Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche.

<u>Exercice n°7</u> : Bac Spécialité Métropole 2022

Dans le cadre d'un essai clinique on envisage un protocole de traitement d'une maladie.
L'objectif de cet exercice est d'étudier l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.
Le protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient. On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par :
$$f(t) = 3te^{-0{,}5t+1}$$
où t désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.

1) On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que, pour tout nombre réel t de $[0\,;\,10]$, on a :
$$f'(t) = 3(-0{,}5t+1)e^{-0{,}5t+1}$$
2) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
3) Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament dans le sang du patient sera-t-elle maximale ? Quelle est alors cette quantité maximale ?
4) Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ notée α, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
   On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2\,;\,10]$, notée β, et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est 3,46.
5) On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à $5\,mg$. Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.

<u>Vidéo</u> : [étudier algébriquement la continuité d'une fonction]