

Interrogation de mathématiques

Classe : TES

Durée : 1h30

Calculatrice : autorisée

Thème : Matrice et recherche de courbes sous contraintes

Exercice n°1 : L'addition

En septembre 2010, une centrale d'achats passe commande auprès du marché de Rungis. Elle désire se ravitailler en légumes, fruits et poissons.

On donne dans les tableaux ci-dessous les prix de gros du marché de Rungis (septembre 2010, source : INSEE)

Légumes (prix TTC pour 100 kg)		Fruits (prix TTC pour 100 kg)		Poissonnerie (Prix TTC au kg)	
Tomate	117,90 €	Pêche	109,58 €	Cabillaud	8,37 €
Carotte	59,50 €	Clémentine	200,00 €	Moule	2,23 €
Poireau	87,70 €	Banane	83,40 €	Langoustine	9,33 €
Oignon	68,30 €	Orange	97,30 €	Dorade royale	4,49 €
Laitue	152,60 €	Poire	109,30 €	Truite	5,30 €

On donne ci-dessous les quantités commandées par la centrale par catégories.

Légumes		Fruits		Poissonnerie	
Tomate	500 kg	Pêche	1 tonne	Cabillaud	200 kg
Carotte	400 kg	Clémentine	200 kg	Moule	1 tonne
Poireau	300 kg	Banane	500 kg	Langoustine	100 kg
Oignon	100 kg	Orange	300 kg	Dorade royale	300 kg
Laitue	150 kg	Poire	200 kg	Truite	150 kg

- 1) Indiquer une matrice P des prix (en €/kg) pour chaque article des trois premiers tableaux. On placera les articles en ligne par catégorie (Ligne 1 : Légumes...).
- 2) Indiquer une matrice Q des quantités (en kg) commandées par la centrale.
- 3) En déduire par un unique calcul matriciel la somme dépensée pour chacune des catégories par la centrale pour son ravitaillement (revenir éventuellement sur le choix de Q pour pouvoir réaliser le calcul demandé en une seule fois).

Exercice n°2 : Bac ES Nouvelle-Calédonie 2011

L'entreprise CoTon produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.

Le coût total de production en euros de l'entreprise CoTon est donné en fonction de la longueur x par la formule : $C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a , b , c et d sont des coefficients réels à déterminer. On rappelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite et que le coût marginal peut être assimilé à la dérivée du coût total.

- Pour une longueur de 2km de tissu, le coût total est de 1390 €.
 - Le coût marginal pour une longueur de 5km est de 425 €.
 - Le coût moyen pour une fabrication de 10km de tissu est de 875 €.
 - Les coûts fixes se montent à 750 €.
- 1) Montrer que les réels a , b , c et d vérifient le système ci-dessous :

$$\begin{cases} 8a + 4b + 2c + d = 1390 \\ 75a + 10b + c = 425 \\ 100a + 10b + c + 0,1d = 875 \\ d = 750 \end{cases}$$

- 2) Résoudre matriciellement le système précédent.
- 3) Le bénéfice de l'entreprise CoTon pour la fabrication et la vente (au prix de 680€ le kilomètre) d'une longueur x où $x \in [0 ; 10]$ est donné par la fonction :

$$B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750.$$

- a) Etudier les variations de la fonction B sur $[0 ; 10]$.
- b) En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximum. Donner la valeur de ce bénéfice.
- c) Etudier la convexité de la fonction B sur $[0 ; 10]$ et en déduire les coordonnées du point d'inflexion de la courbe représentative C_B de B .

Exercice n°3 :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a , b , c et d sont des coefficients réels à déterminer.

- f admet un minimum en 4.
 - $f'(1) = 9$
 - Sa courbe représentative C_f admet un point d'inflexion $A(3 ; 8)$.
- 1) Combien faut-il d'équations pour déterminer cette fonction ? Justifier.
- 2) Calculer la dérivée, $f'(x)$, de f et la dérivée seconde, $f''(x)$, de f .
- 3) Montrer que les réels a , b , c et d vérifient le système ci-dessous :

$$\begin{cases} 27a + 9b + 3c + d = 8 \\ 3a + 2b + c = 9 \\ 48a + 8b + c = 0 \\ 18a + 2b = 0 \end{cases}$$

- 4) Résoudre le système précédent.
- 5) En déduire l'expression de f .
- 6) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.