# Variations et fonctions de référence

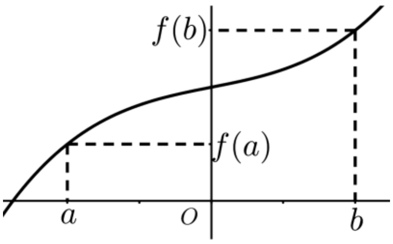
## A) Rappels : Sens de variation et extremum d'une fonction.

### 1. Fonction croissante.

Définition :

Dire qu'une fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $I$ signifie que l'une des deux propositions suivantes est vérifiée :

- Pour tous réels $a$ et $b$ $(a \neq b)$ de $I$, $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.
- Pour tous réels $a$ et $b$ $(a \neq b)$ de $I$, $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$.

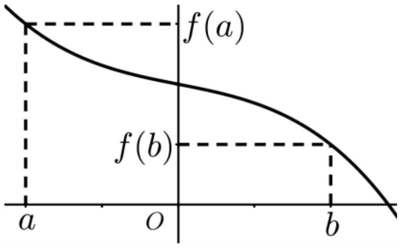



### 2. Fonction décroissante.

Définition :

Dire qu'une fonction $f$ est strictement décroissante sur l'intervalle $I$ signifie que l'une des deux propositions suivantes est vérifiée :

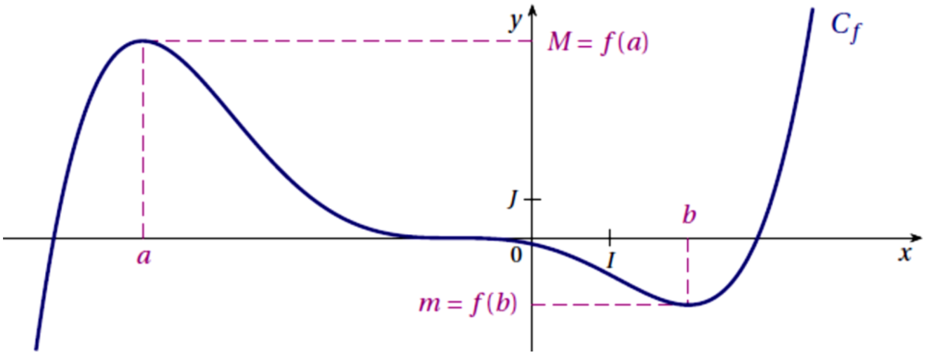
- Pour tous réels $a$ et $b$ $(a \neq b)$ de $I$, $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.
- Pour tous réels $a$ et $b$ $(a \neq b)$ de $I$, $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0$.




### 3. Extremum.

Définition :

- Dire que la fonction $f$ admet un maximum en $a$ qui vaut $M$ sur l'intervalle $I$ signifie : que $f(a) = M$ et que pour tout réel $x$ de $I$, on a : $f(x) \leq M$.
- Dire que la fonction $f$ admet un minimum en $b$ qui vaut $m$ sur l'intervalle $I$ signifie : que $f(b) = m$ et que pour tout réel $x$ de $I$, on a : $f(x) \geq m$.
- La fonction $f$ admet un extremum sur l'intervalle $I$ si elle admet un minimum ou/et un maximum sur $I$.




### 4. Variations d'une fonction.

Définition :

Etudier les variations d'une fonction $f$ c'est déterminer les intervalles sur lesquels cette fonction est monotone, c'est-à-dire croissante ou décroissante.

### 5. **Tableau de variations.**

On peut résumer l'ensemble des informations précédemment obtenues dans un tableau de variations.

| $x$ | $-\infty$ | | $a$ | | $b$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $M$ | $\searrow$ | $m$ | $\nearrow$ | |

## B) **Fonctions affines.**

### 1. **Définition d'une fonction affine.**

Définition :

$f$ est une fonction affine, si et seulement si, il existe deux réels $a$ et $b$ tels que pour tout nombre réel $x$ : $f(x) = ax + b$.

Notations :

- $a$ est appelé coefficient directeur.
- $b$ est appelé ordonnée à l'origine.

Propriété :

$f$ est une fonction affine vérifiant : $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. On a alors $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

### 2. **Variations d'une fonction affine.**

Dans toute cette partie, $f$ est la fonction affine définie pour tout réel $x$ par : $f(x) = ax + b$.

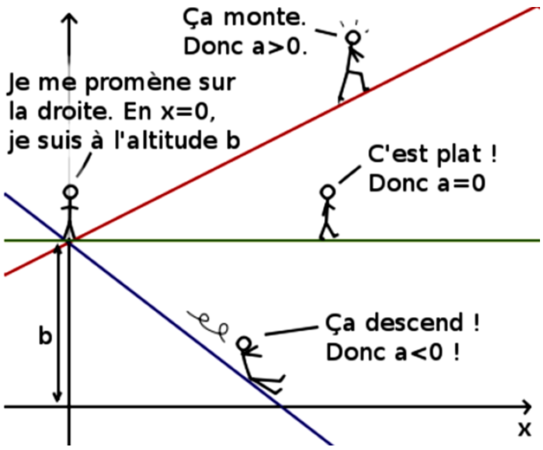
Propriétés :

La variation d'une fonction affine $f$ dépend seulement du signe de son coefficient directeur $a$ :

1er cas : $a < 0 \Leftrightarrow f$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2ème cas : $a > 0 \Leftrightarrow f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

3ème cas : $a = 0 \Leftrightarrow f$ est constante sur $\mathbb{R}$.

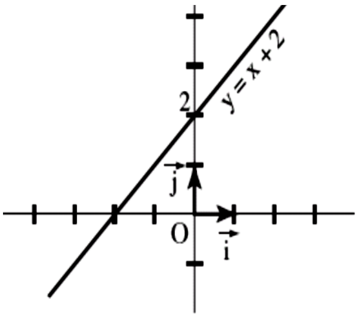


## 3. Représentation graphique d'une fonction affine : droite.

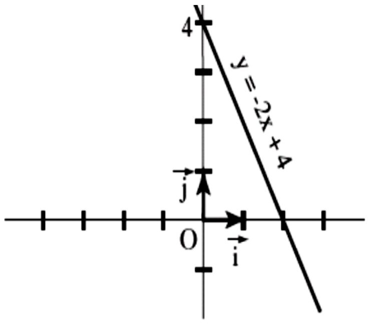
Propriétés :

La représentation graphique de la fonction affine $f$ est la droite d'équation : $y = ax + b$.

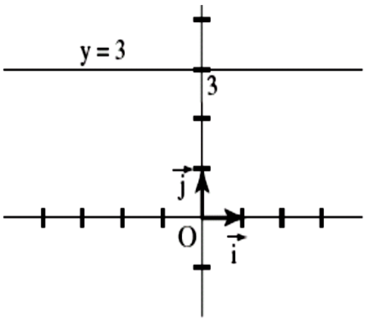
1er cas : $a > 0$ — 2ème cas : $a < 0$ — 3ème cas : $a = 0$




m = 1 ; p = 2




m = –2 ; p = 4




m = 0 ; p = 3

Exemple : Représentation graphique.

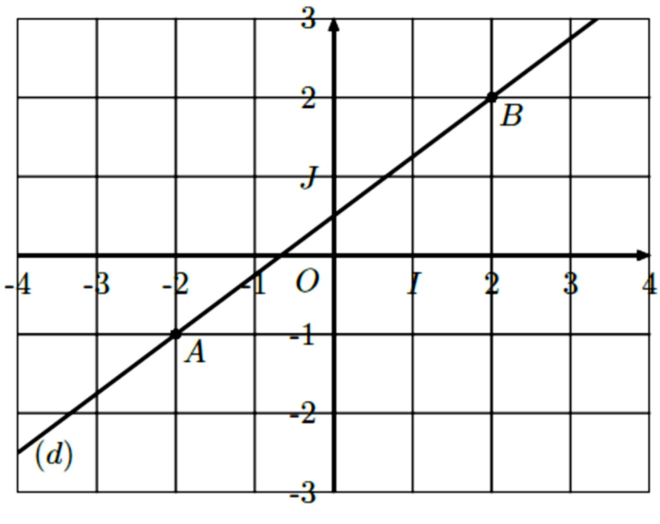
Soit $f$ une fonction définie pour tout $x$ réel par : $f(x) = 0{,}75x + 0{,}5$.

$f$ est une fonction affine, sa représentation graphique $C_f$ est donc une droite.

Il suffit d'avoir deux points appartenant à cette droite pour pouvoir la tracer.

- On calcule, par exemple, $f(-2) = 0{,}75 \times (-2) + 0{,}5 = -1$.
  On place le point $A(-2\ ;\ -1)$.
- On calcule, par exemple, $f(2) = 0{,}75 \times 2 + 0{,}5 = 2$.
  On place le point $B(2\ ;\ 2)$.

Conclusion : $C_f$ est la droite passant par les points $A(-2\ ;\ -1)$ et $B(2\ ;\ 2)$.




Exercice n°1 :

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = mx + p$.

1) Comment s'appelle cette famille de fonctions et quelle est leur représentation graphique ?
2) Montrer que pour tous réels $a$ et $b$ $(a \neq b)$ : $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = m$.
3) En déduire que les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$ dépend uniquement du signe de $m$.

# C) Fonctions inverse.

## 1. Définition de la fonction inverse.

Définition :

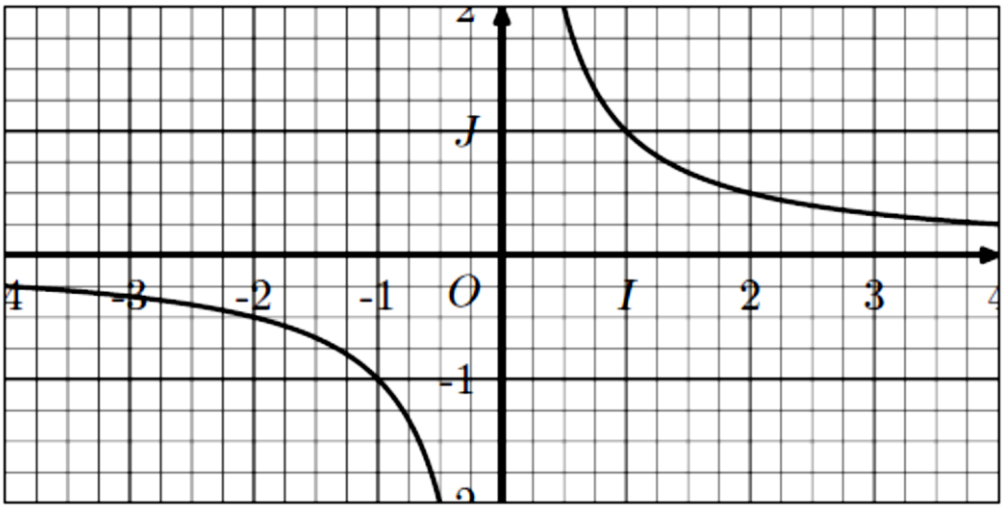
La fonction inverse est la fonction $f$ définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1) La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^* = \left]-\infty\,;\,0\right[ \cup \left]0\,;\,+\infty\right[$.
2) La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^{-*} = \left]-\infty\,;\,0\right[$ et sur $\mathbb{R}^{+*} = \left]0\,;\,+\infty\right[$.

## 2. Variations de la fonction inverse.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ |

## 3. Représentation graphique de la fonction inverse : hyperbole.




*Remarque : La représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.*

Exercice n°2 :

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1) Montrer que pour tous $a$ et $b \in \mathbb{R}^*$ $(a \neq b)$ : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{-1}{ab}$.
2) Montrer que pour tous $a$ et $b \in \mathbb{R}^{-*}$ $(a \neq b)$ : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} < 0$.
3) Montrer que pour tous $a$ et $b \in \mathbb{R}^{+*}$ $(a \neq b)$ : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} < 0$.
4) En déduire les variations de $f$ sur $\mathbb{R}^*$.

# D) Fonctions racine carrée.

## 1. Définition de la fonction racine carrée.

Définition :

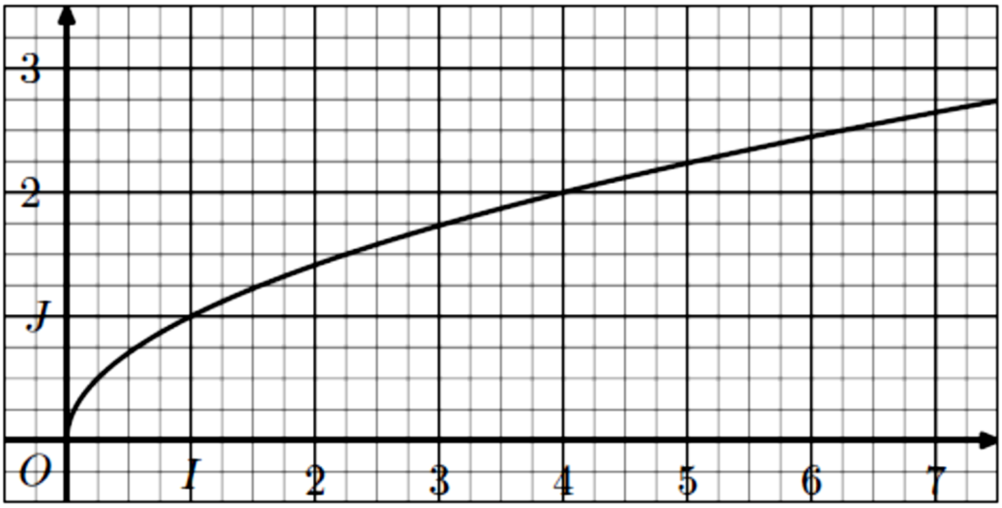
La fonction racine carrée est la fonction $f$ définie par : $f(x)=\sqrt{x}$.

1) La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^+ = [0\,;+\infty[$.
2) La fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

## 2. Variation de la fonction racine carrée.

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ ↗ | $+\infty$ |

## 3. Représentation graphique de la fonction racine carrée.




Exercice n°3 : **ROC** (Restitution organisée de connaissances) !

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\sqrt{x}$.

1) Montrer que pour tous $a$ et $b \in \mathbb{R}^+$ $(a \neq b)$ : $\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}=\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$.

   On pensera à multiplier la première expression par $\sqrt{b}+\sqrt{a}$ au numérateur et bien sûr au dénominateur.
2) En déduire que pour tous $a$ et $b \in \mathbb{R}^+$ $(a \neq b)$ : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$.
3) En déduire les variations de $f$ sur $\mathbb{R}^+$.

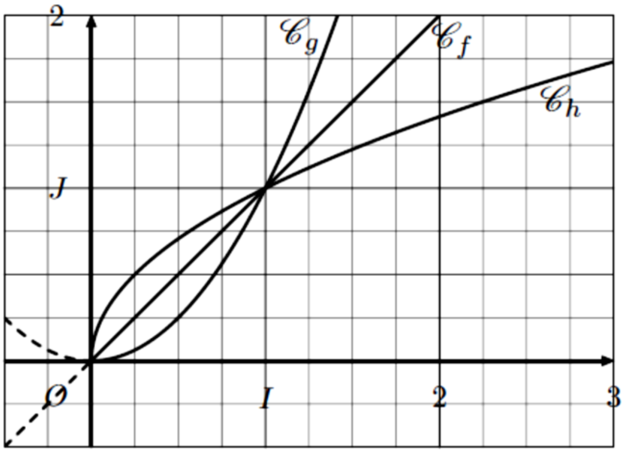
## E) Croissances comparées.

Propriétés :

- Si $0 \leq x \leq 1$ alors $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$ .
- Si $x > 1$ alors $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$ .

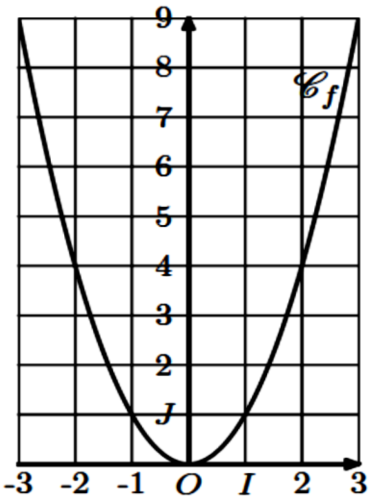
Exercice n°4 : **ROC** (Restitution organisée de connaissances) !

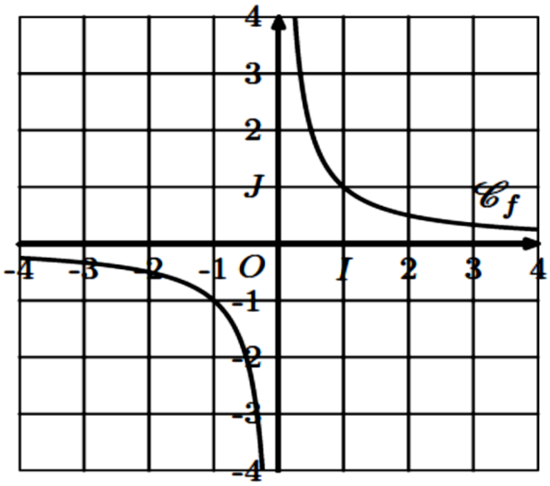
1) Etudier le signe de $x^2 - x$ sur $\mathbb{R}^+$.
2) Que peut-on en déduire pour la propriété précédente ?
3) Montrer que pour tout $x > 0$ : $x - \sqrt{x} = \dfrac{x^2 - x}{x + \sqrt{x}}$ et en déduire le signe de $x - \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$.
4) Que peut-on en déduire quant aux positions relatives des courbes représentatives des fonction définies par : $f(x) = x$ , $g(x) = x^2$ et $h(x) = \sqrt{x}$ ?




Exercice n°5 :

Dans des repères ($O$ ; $I$ ; $J$ ) orthormaux, sont données ci-dessous les courbes représentatives respectivement de la fonction carrée et de la fonction inverse :




Compléter, sans justification, les assertions suivantes :

1) Si $x \in [1\,;\,3[$ alors $x^2 \in$……..
2) Si $x \in [2\,;\,4[$ alors $\dfrac{1}{x} \in$……..
3) Si $x \in ]-1\,;\,2]$ alors $x^2 \in$……..
4) Si $x \in ]0\,;\,2]$ alors $\dfrac{1}{x} \in$……..

# F) Etude des variations.

## 1. Fonctions *u + k*.

Définition :

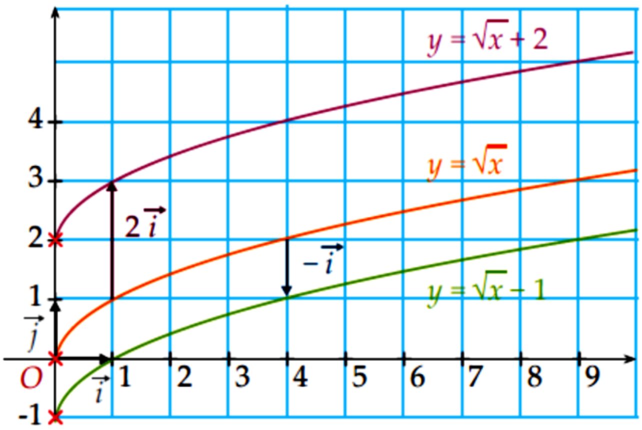
Soit $u$ une fonction définie sur un ensemble $D_u$ et $k$ un réel.

La fonction notée $u+k$ est la fonction définie sur $D_u$ par : $(u+k)(x)=u(x)+k$.

Propriété :

Soit $u$ une fonction monotone sur un intervalle $I$ et $k$ un réel.
Les fonctions $u(x)$ et $u(x)+k$ ont les mêmes variations sur $I$.

Exemples :




## 2. Fonction *ku*.

Définition :

Soit $u$ une fonction définie sur un ensemble $D_u$ et $k$ un réel.

La fonction notée $ku$ est la fonction définie sur $D_u$ par : $(ku)(x)=k\times u(x)$.

Propriété :

Soit $u$ une fonction monotone sur un intervalle $I$ et $k$ un réel.

- Si $k>0$ les fonctions $u$ et $ku$ ont les mêmes variations sur $I$.
- Si $k<0$ les fonctions $u$ et $ku$ ont des variations contraires sur $I$.

Exemples :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u(x)$ | | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |
| $4u(x)$ | | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |
| $-\frac{1}{2}u(x)$ | | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | |

## 3. Fonction $\sqrt{u}$.

Définition :

Soit $u$ une fonction définie sur un ensemble $D_u$ et telle que pour tout $x \in D_u$ : $u(x) \geq 0$.

La fonction notée $\sqrt{u}$ est la fonction définie sur $D_u$ par : $(\sqrt{u})(x) = \sqrt{u(x)}$.

Propriété :

Soit $u$ une fonction monotone sur un intervalle $I$ telle que pour tout $x \in I$, $u(x) \geq 0$ alors les fonctions $u$ et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations sur $I$.

Domaine de définition :

La racine carrée d'un nombre existe si, et seulement si, ce nombre est positif.

$$\sqrt{u(x)} \text{ existe } \Leftrightarrow u(x) \text{ existe et est positif.}$$

Exemple :

On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$.

On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^2 + 3x - 4$.

$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25 > 0$

$\Delta > 0$ donc l'équation $P(x) = 0$ admet deux solutions distinctes qui sont :

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \times 1} = -4 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \times 1} = 1$$

Le coefficient devant $x^2$ étant positif, on en déduit que :

$P(x) > 0$ sur $]-\infty, -4] \cup [1 ; +\infty[$.

Donc $D_f = ]-\infty, -4] \cup [1 ; +\infty[$.

De plus, la forme canonique de $P$ est $P(x) = (x + 1{,}5)^2 - 6{,}25$ et le coefficient de $x^2$ étant positif, on peut affirmer que :

$P$ est décroissante sur $]-\infty ; -1{,}5]$ et croissante sur $[-1{,}5 ; +\infty[$.

Or $f = \sqrt{P}$ donc $f$ est décroissante sur $]-\infty ; -4]$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$ car la fonction racine carrée conserve les variations.

Exercice n°6 :

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies par : $f(x) = 4 - \sqrt{2x - 6}$ et $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$.

1) Donner les domaines de définition, $D_f$, de $f$ et $D_g$, de $g$.
2) Etude de $f$.
   a) Démontrer que $f$ est décroissante sur $D_f$ et dresser son tableau de variations.
   b) Résoudre l'équation : $f(x) = 0$.
3) Etude de $g$.
   a) Déterminer les variations de la fonction $h(x) = x^2 - 4x - 5$ sur $\mathbb{R}$ puis sur $D_g$.
   b) En déduire les variations de $g$ sur $D_g$ et dresser son tableau de variations.
   c) Résoudre l'inéquation : $g(x) \leq 4$.

## 4. Fonction $1/u$.

Définition :

Soit $u$ une fonction définie sur un ensemble $D_u$ et telle que pour tout $x \in D_u$ : $u(x) \neq 0$.

La fonction notée $\frac{1}{u}$ est la fonction définie sur $D_u$ par : $\left(\frac{1}{u}\right)(x) = \frac{1}{u(x)}$.

Propriété :

Soit $u$ une fonction monotone sur un intervalle $I$ et telle que pour tout $x \in I$ $u(x) \neq 0$ et $u(x)$ garde le même signe sur $I$ alors $u$ et $\frac{1}{u}$ ont des variations contraires sur $I$.

Exemple :

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{-2x+10}$.

Le domaine de définition de $f$ est $D_f = ]-\infty\ ,\ 5[ \cup ]5\ ;\ +\infty[ = \mathbb{R}/\{5\}$.

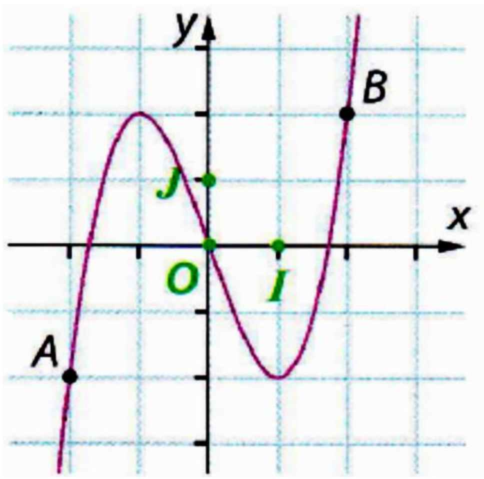
On commence par étudier le sens de variation et le signe de la fonction $u(x) = -2x+10$.

| $x$ | $-\infty$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u(x)$ | $u(x) > 0$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $u(x) < 0$ |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $\Vert$ | $\nearrow$ | |

Car sur $]-\infty\ ,\ 5[$ et sur $]5\ ;\ +\infty[$, $u$ et $\frac{1}{u}$ ont des sens de variation contraires.

Exercice n°7 :

La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et n'a pas d'autres changements de variations que ceux visibles sur la courbe ci-contre. On sait de plus que cette courbe coupe l'axe (OI) aux points d'abscisses : $-\sqrt{3}$ ; 0 et $\sqrt{3}$.




1) Dresser le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.
2) Résoudre graphiquement :
   a) $f(x) = -2$.
   b) $f(x) \geq 0$.
3) Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :
   a) 0 a trois images par $f$.
   b) Les antécédents de 2 par $f$ sont –1 et 2.
   c) $f$ admet un maximum sur $[-2\ ;\ 0]$.
   d) $f$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$.
4) On considère les fonctions $g$ et $h$ définies par : $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ et $h(x) = \sqrt{f(x)}$.
   a) Déterminer les ensembles de définition des fonctions $D_g$ de $g$ et $D_h$ de $h$.
   b) Déterminer les variations des fonctions $g$ et $h$ sur leur domaine de définition.

# G) Fonctions valeur absolue.

## 1. Définition de la fonction valeur absolue.

Définition :

La valeur absolue d'un nombre réel $x$ se note $|x|$ est définie sur ℝ par :

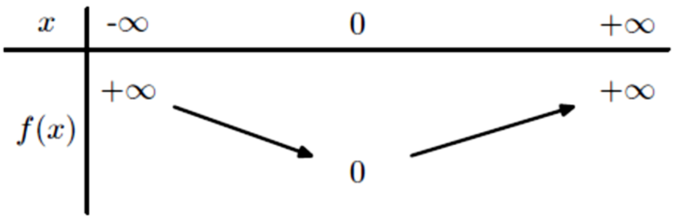
$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \text{ est un réel positif} \\ -x & si \quad x \text{ est un réel négatif} \end{cases}.$$

Définition :

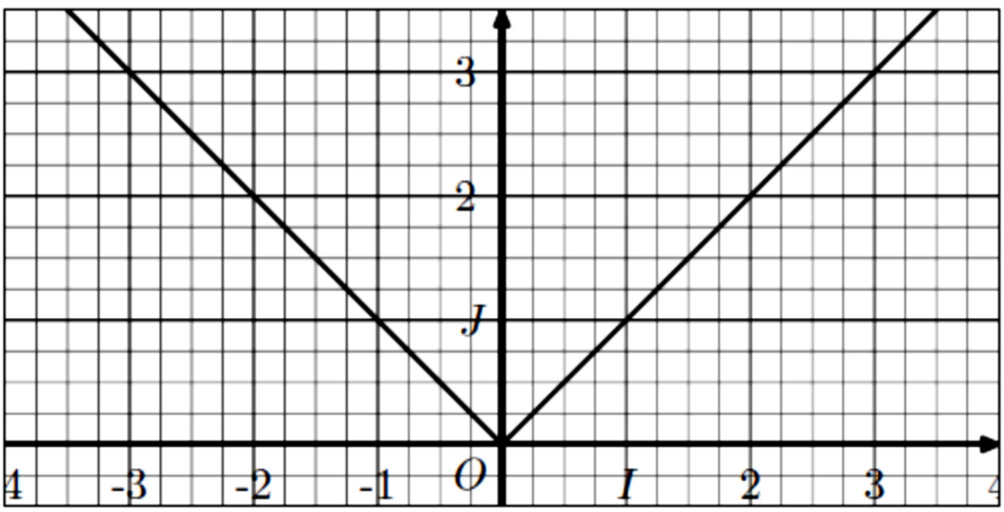
La fonction valeur absolue est la fonction $f$ définie par : $f(x) = |x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x \leq 0 \end{cases}$.

1) La fonction valeur absolue est définie sur ℝ.
2) La fonction valeur absolue est croissante $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

## 2. Variations de la fonction valeur absolue.




## 3. Représentation graphique de la fonction valeur absolue : ligne brisée.




Exercice n°8 :

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = |x|$.

1) Montrer que pour tous $a$ et $b \in \mathbb{R}^+$ $(a \neq b)$ : $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$.

2) Montrer que pour tous $a$ et $b \in \mathbb{R}^-$ $(a \neq b)$ : $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0$.

3) En déduire les variations de $f$ sur ℝ.

Propriétés :

1) Pour tout nombre réel $x$ : $|x| \geq 0$.
2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3) Deux nombres réels opposés ont la même valeur absolue donc pour tout réel $x$ : $|x| = |-x|$.
4) Deux nombres réels ont la même valeur absolue si et seulement s'ils sont égaux ou opposés :
   $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ *ou* $x = -y$.
5) Pour tout nombre réel $x$ : $\sqrt{x^2} = |x|$.

## 4. Ecrire sans valeur absolue.

Propriétés :

Pour écrire l'expression $|A(x)|$ sans barre de valeur absolue, on cherche le signe de $A(x)$.

Lorsque l'expression $A(x)$ est positive, alors $|A(x)| = A(x)$.

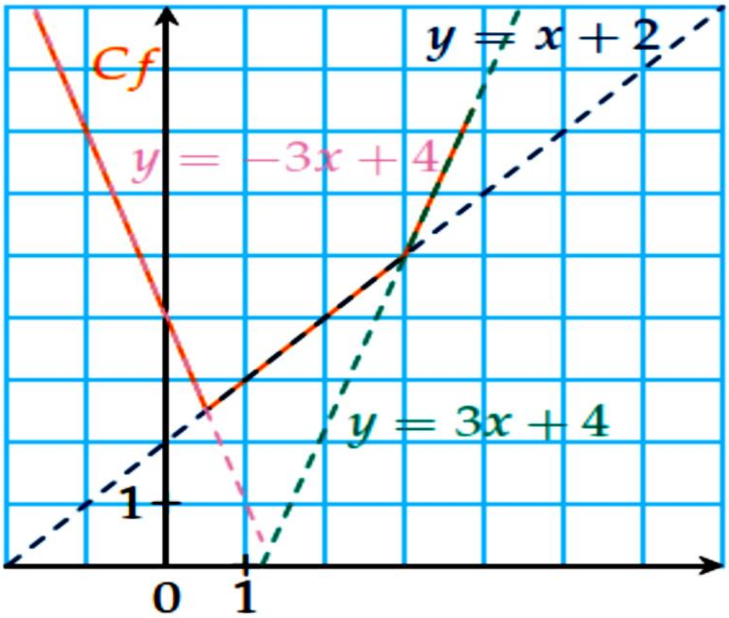
Lorsque l'expression $A(x)$ est négative, alors $|A(x)| = -A(x)$.

Exemple :

Ecrire la fonction $f(x) = |x-3| + |-2x+1|$ sans valeur absolue puis représenter $C_f$.

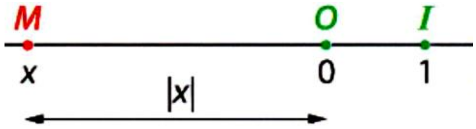
- $x-3 \geq 0$ si $x \geq 3$ donc $x-3 \leq 0$ si $x \leq 3$.
- $-2x+1 \geq 0$ si $x \leq \frac{1}{2}$ donc $-2x+1 \leq 0$ si $x \geq \frac{1}{2}$.

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $\|x-3\|$ | $-x+3$ | $-x+3$ | $x-3$ | |
| $\|-2x+1\|$ | $-2x+1$ | $2x-1$ | $2x-1$ | |
| $f(x)$ | $-3x+4$ | $x+2$ | $3x-4$ | |

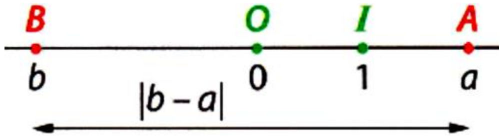


## 5. Valeur absolue et distance.

Si $x$ est un nombre réel et $M$ le point d'abscisse $x$ sur une droite graduée de repère ($O$ ; $I$ ) alors la distance entre $O$ et $M$ est : $OM = |x|$.




Si $a$ et $b$ sont deux réels, $A$ et $B$ les points d'abscisses respectives $a$ et $b$ sur une droite graduée alors la distance entre $A$ et $B$ est : $AB = |a-b| = |b-a|$.




Exercice n°9 :

Effectuer « manuellement » les calculs suivants :

1) $|-2-3|$.
2) $|-6|+|9|$.
3) $|-6+9|$.
4) $|1-2-3|-|-4|$.
5) $\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right|$.

Exercice n°10 :

Exprimer les nombres suivants sans utiliser les barres de valeur absolue :

1) $|-\sqrt{3}-\sqrt{6}|$.
2) $|-\sqrt{2}+1|$.
3) $|2\sqrt{3}-3|$.
4) $|-\pi^2+10|$.

Exercice n°11 :

Résoudre IR les équations suivantes :

1) $|x| = 4$.
2) $|x| = -3$.
3) $|2x+1| = 7$.
4) $|x+5| = |8-x|$.
5) $|x^2-3x-2| = 2$.

Exercice n°12 :

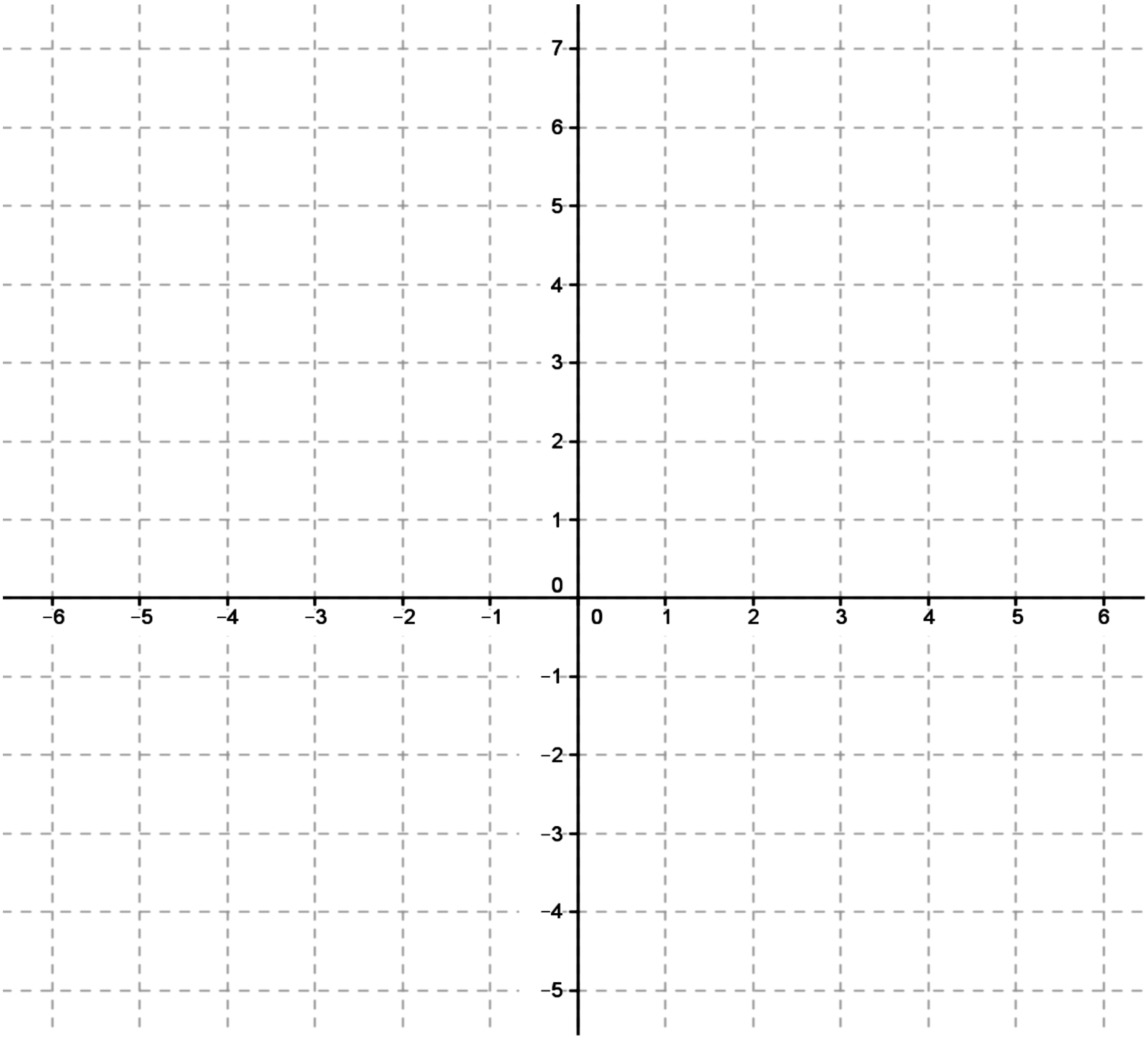
Résoudre dans IR les inéquations suivantes (pour cela on pourra traduire les valeurs absolues par des distances) :

1) $|x| \leq 4$.
2) $|x| \geq 1$.
3) $|2x-4| > 2$.
4) $|-4x+3| < 1$.

<u>Exercice n°13</u> :

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x+2| - |-3x-4| + 5$.

1) Ecrire $f$ sans utiliser les barres de valeur absolue.
2) Donner, en les justifiant, les variations de $f$ et dresser son tableau de variations.
3) Tracer la représentation graphique $C_f$ de $f$ dans un repère donné ci-dessous.



4) Déterminer graphiquement :
   a) Le (les) antécédent(s) de –3 par $f$.
   b) Le (les) image(s) de –3 par $f$.
5) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) > -x+1$.

<u>Exercice n°14</u> :

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = a|x-3| + b$ où $a$ et $b$ sont deux réels fixés.

On donne : $f(4) = -1$ et $f(1) = 2$.

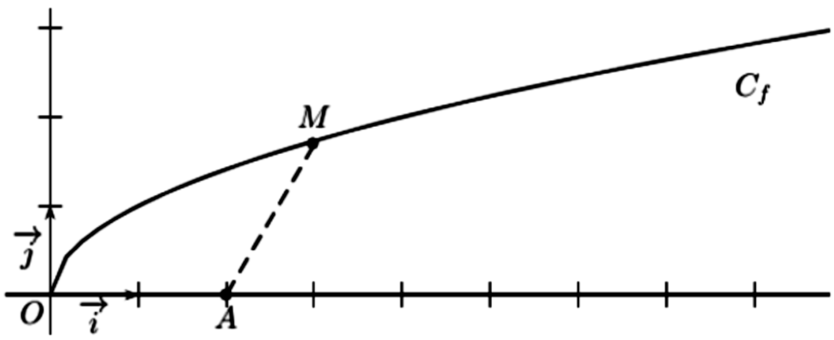
1) Déterminer les réels $a$ et $b$.
2) Ecrire $f$ sans utiliser les barres de valeur absolue.
3) En déduire les variations de $f$ et dresser son tableau de variations.
4) Résoudre l'équation : $f(x) = 2$.
5) Résoudre l'inéquation : $f(x) > 5$.

Exercice n°15 :

1) On considère la fonction $u$ définie par : $u(x)=\dfrac{3x-3}{x+2}$.
   a) Déterminer le domaine de définition, $D_u$, de $u$.
   b) Montrer que pour tout $x\in D_u$ : $u(x)=3+\dfrac{-9}{x+2}$.
   c) Montrer que $u$ est croissante sur $]-2\,;+\infty[$ et croissante sur $]-\infty\,;-2[$.
   d) Déterminer le signe de $u$ sur $D_u$.
2) On considère maintenant la fonction $g=-5\sqrt{u}+7$.
   a) Donner l'ensemble de définition de $g$.
   b) Déterminer les variations de $g$ sur $[1\,;+\infty[$.
3) On considère la fonction $f$ définie par : $f(x)=|u(x)|$.
   a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}/\{-2\}$ : $f(x)=\begin{cases} u(x) & si\ x\in\,]-\infty\,;-2[\,\cup\,[1\,;+\infty[ \\ -u(x) & si\ x\in\,]-2\,;1] \end{cases}$.
   b) En déduire les variations de $f$ sur $\mathbb{R}/\{-2\}$ et dresser son tableau de variations.

Exercice n°16 :

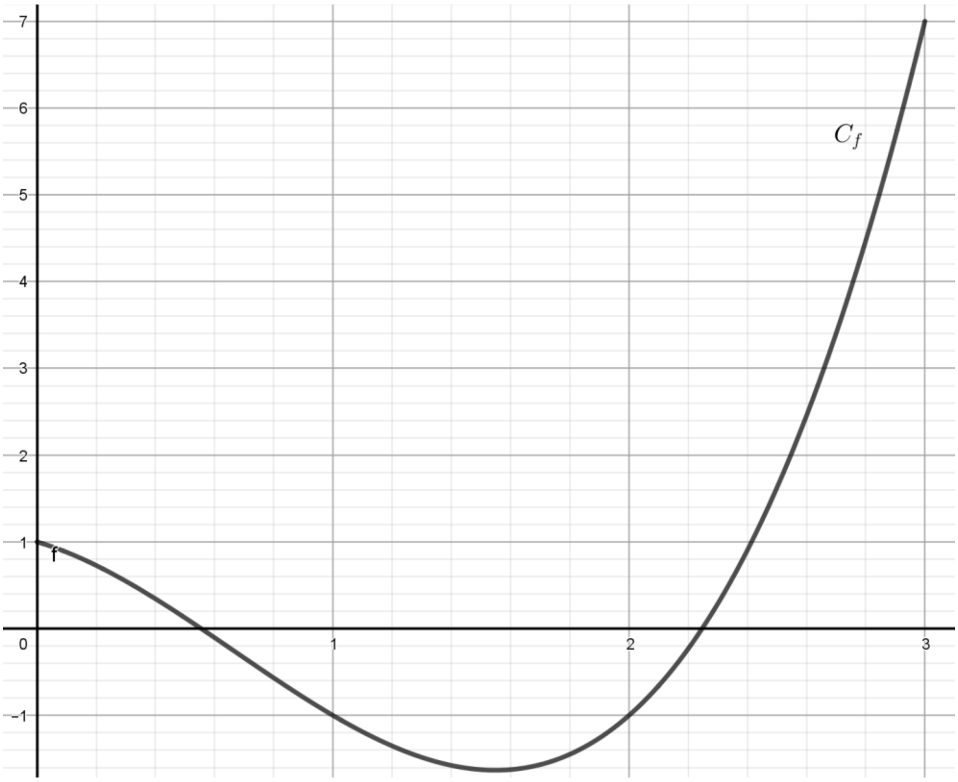
Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$., on considère la courbe $C_f$ représentative de la fonction $f(x)=\sqrt{x}$ et le point $A(2\,;0)$.
$x$ est un réel positif, et $M(x\,;\,f(x))$ le point de la courbe $C_f$ d'abscisse $x$.
L'objet de ce problème est de déterminer le point $M$ de $C_f$ le plus proche de A.




1) Montrer que $AM=\sqrt{x^2-3x+4}$.
   **Rappel** : la distance entre deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ est donnée par :
   $$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$
2) On note $g$ la fonction définie par : $g(x)=x^2-3x+4$.
   a) Etudier le signe de $g$ sur $\mathbb{R}$.
   b) Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de la fonction $g$ sur $[0\,;+\infty[$.
3) Soit $d$ la fonction qui au nombre $x$ associe la valeur : $d(x)=AM=\sqrt{x^2-3x+4}$.
   a) Etablir, en le justifiant, le tableau de variations de la fonction $d$ sur $[0\,;+\infty[$.
   b) En déduire, en justifiant, les coordonnées du point $M$ de $C_f$ le plus proche de $A$, ainsi que la distance $AM$ correspondante.
4) Déterminer le ou les points $M$ de $C_f$ tel(s) que $AMO$ soit isocèle en $A$.

<u>Exercice n°17</u> :

On considère la fonction $f$ définie sur $[0\,;3]$ par : $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$ et on dont la représentation graphique $C_f$ est donnée ci-dessous.




1) Compléter l'algorithme suivant dans le contexte de l'exercice :

```
x=float(input("Abscisse du point"))
y=float(input("Ordonnée du point"))
if y==x**3-2*x**2-x+1 :
    print("....................................")
else :
    print("....................................")
```

2) On considère l'algorithme suivant :

```
a=0
b=0.1
while b**3-2*b**2-b+1>0 :
    a, b = a+0.1, b+0.1
print("Entre a=", a)
print("Et b=", b)
```

a) Faire tourner « manuellement » cet algorithme. On complétera le tableau ci-dessous au fur et à mesure :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 0 | 0,1 | | | | | |
| b | 0,1 | 0,2 | | | | | |
| Condition | Vraie | | | | | | |

b) Interpréter, dans le contexte de l'exercice, les affichages de cet algorithme.

c) Comment doit-on modifier cet algorithme afin qu'il affiche les deux valeurs suivantes vérifiant cette propriété ?

<u>Exercice n°18</u> :

1) Soit $u$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 2x^2 + 4x - 6$.
   a) Déterminer la forme canonique de $u$.
   b) En déduire le tableau de variation de $u$.
   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $u(x) \geq 0$.
2) On considère maintenant la fonction $f = -2\sqrt{u} - 1$.
   a) Donner l'ensemble de définition de $f$.
   b) Déterminer le tableau de variations de $f$ sur $\left]-\infty\,;-3\right]$ et sur $\left[1\,;+\infty\right[$.
3) On considère maintenant la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -2|u(x)| - 1$.
   a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $g(x) < 0$.
   b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $g(x) = \begin{cases} -2u(x) - 1 & si\ x \in \left]-\infty\,;-3\right] \cup \left[1\,;+\infty\right[ \\ 2u(x) - 1 & si\ x \in \left[-3\,;1\right] \end{cases}$.
   c) En déduire les variations de $g$ sur $\mathbb{R}$.
   d) On considère l'algorithme ci-dessous :

```
x=float(input("x="))
if x<=-3 :
    print("g(x) =", -4*x**2-8*x+11)
elif ............... and ............... :
    print("g(x) =", .........................)
else :
    print("g(x) =", .........................)
```

   Compléter les pointillés afin que cet algorithme calcule et affiche l'image par la fonction $g$ de tout réel.
4) On considère maintenant la fonction $h$ définie sur $\left]-3\,;1\right[$ par : $h(x) = \dfrac{-3}{u(x)}$.
   a) Montrer que la fonction $h$ est bien définie sur $\left]-3\,;1\right[$.
   b) Déterminer, en les justifiants, les variations de $h$ sur $\left]-3\,;1\right[$.