Le second degré

A) Polynôme du second degré et parabole.

1. Forme d'un polynôme du second degré.

Définition :

Un polynôme qui s'écrit $ax^2 + bx + c$, où a est différent de zéro, est un **polynôme de degré 2**, de la variable réelle x.
La fonction définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ est une fonction polynôme du second degré.

*Remarque : Un polynôme du second degré est fréquemment appelé **trinôme du second degré** ou plus simplement **trinôme**. On dit que a est le coefficient de x^2, b celui de x et c est le terme constant.*

Théorème :

Un polynôme du second degré peut s'écrire sous trois formes :

- Développée : $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Canonique : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
- Factorisée : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Démonstration : Forme canonique

Pour tout réel x, on a : $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$.

Or pour tout réel x, on a aussi : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$.

Donc pour tout réel x : $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$.

D'où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{-b^2+4ac}{4a} = f(\alpha)$.
La formule de β et cette démonstration ne sont pas à apprendre !

Remarque : Tous les polynômes du second degré peuvent s'écrire sous forme canonique (et évidemment développée) mais pas nécessairement sous forme factorisée (nous démontrerons cela dans la suite de ce chapitre).

Exemple :

On considère le polynôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 - 2x + 15$.

- Cette forme est la forme développée avec $a = -1$, $b = -2$ et $c = 15$.
- Sa forme canonique est : $f(x) = -(x+1)^2 + 16$.
- Sa forme factorisée est : $f(x) = -(x-3)(x+5)$.

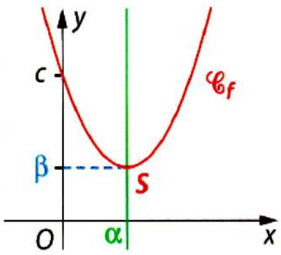
2. Représentation graphique d'un trinôme.

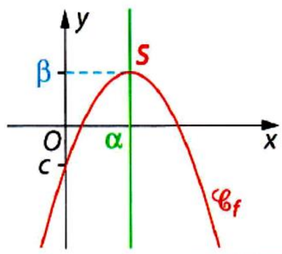
Propriétés :

La courbe C_f représentative d'une fonction polynôme du second degré $f : \mapsto ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ est une parabole.

- Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S(\alpha\ ;\ \beta)$.
- Les coordonnées α et β sont obtenues avec la forme canonique.
- La droite d'équation $x=\alpha$ est un axe de symétrie pour cette parabole.

Le tableau ci-dessous récapitule ce que nous avons trouvé jusqu'à présent :

<table>
<tr><th>Aspect algébrique</th><th colspan="2">Aspect graphique</th></tr>
<tr><td>Forme développée :
$f(x)=ax^2+bx+c$
$(a\neq 0)$</td><td colspan="2">La parabole coupe l'axe des ordonnées au point $(0\,;c)$.
Si $a>0$ (strictement positif), les branches de la parabole sont tournées vers le haut. | Si $a<0$ (strictement négatif), les branches de la parabole sont tournées vers le bas.</td></tr>
<tr><td>Forme canonique :
$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$
$(a\neq 0)$,
où $\alpha=\dfrac{-b}{2\times a}$
et $\beta=f(\alpha)$.</td><td colspan="2">

• Le sommet de la parabole est $S(\alpha\,;\beta)$.
• La parabole est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x=\alpha$.

</td></tr>
<tr><td>Sens de variation</td><td>Tableau de variations pour $a>0$:
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>↘</td><td>β</td><td>↗</td></tr></table>Le minimum est β, atteint en α.</td><td>Tableau de variations pour $a<0$:
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>↗</td><td>β</td><td>↘</td></tr></table>Le maximum est β, atteint en α.</td></tr>
</table>

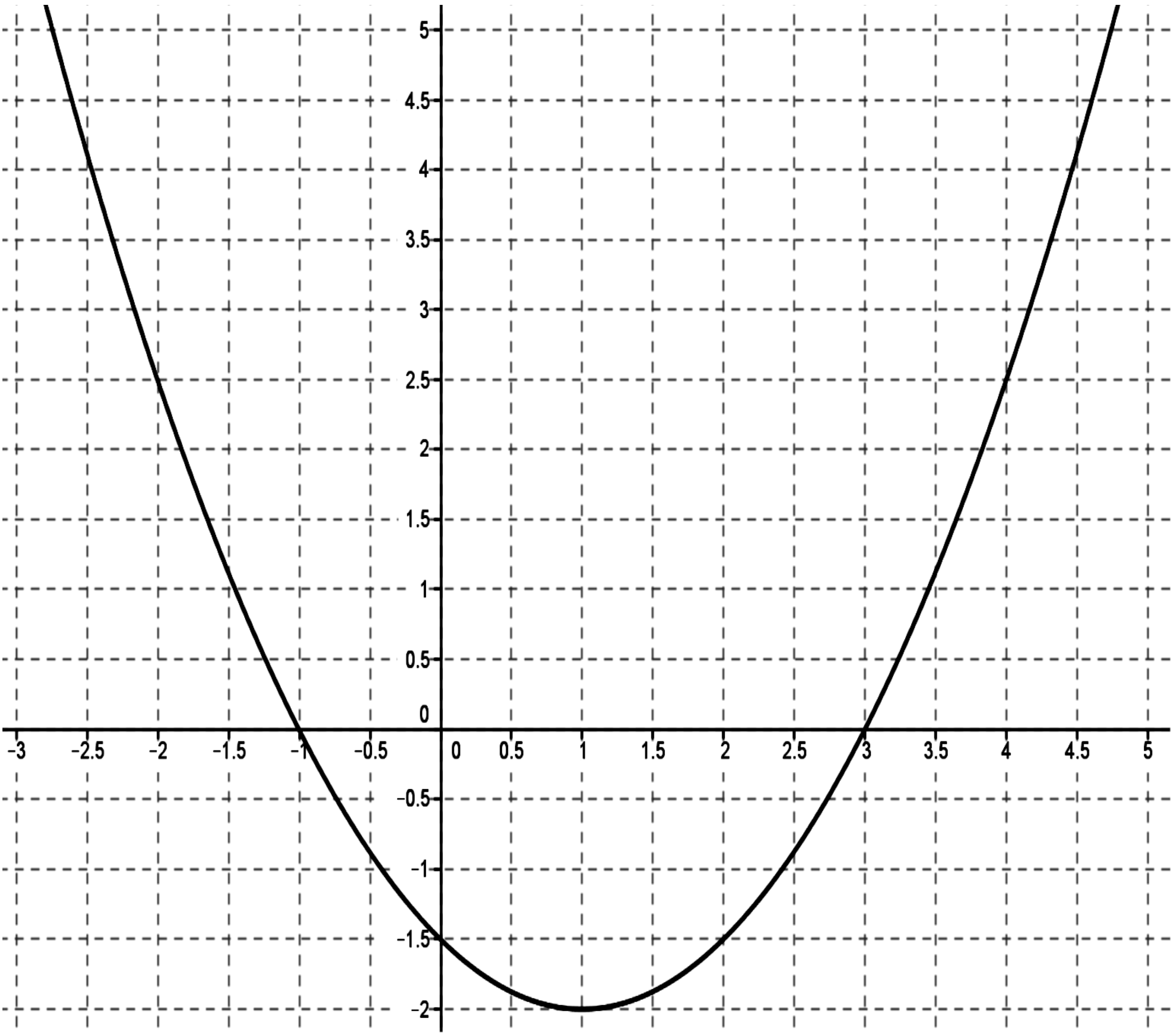
Exercice n°1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=0{,}5x^2-x-1{,}5$.

La courbe représentative, C_f, de f est donnée sur la page suivante.

Partie A : Etude de la fonction.

1) Quelle est la nature de cette courbe ?
2) Donner la forme canonique de f.
3) Justifier que f admet un minimum et déterminer les coordonnées du sommet S de C_f.
4) Déduire de la question 2) la forme factorisée de f.
5) En utilisant la forme la plus adaptée, répondre aux questions suivantes :
   a) Dresser le tableau de variations de f (on justifiera les variations).
   b) Résoudre l'inéquation : $f(x)>0$.
   c) Résoudre l'équation : $f(x)=-2$.
   d) Résoudre l'équation : $f(x)=-1{,}5$.
6) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\leq 0{,}5x-1{,}5$.
7) Retrouver algébriquement le résultat précédent.



<u>Partie B</u> : algorithmique.

On considère l'algorithme suivant :

```
a=float(input("a="))
b=float(input("b="))
c=float(input("c="))
Alpha=-b/(2*a)
Beta=(-b**2+4*a*c)/(4*a)
print("Alpha =", Alpha)
print("Beta =", Beta)
```

1) Dans quel langage cet algorithme est-il tapé ?
2) Quel est le but de cet algorithme ?
3) Taper, sur votre calculatrice, un programme (qu'on pourra nommer « CANONIQUE ») correspondant à cet algorithme.

B) Equation du second degré.

1. Discriminant et racine(s) d'un trinôme.

a, b et c désignent des réels avec $a \neq 0$.

Définition :

- Résoudre une équation du second degré, c'est trouver l'ensemble des réels x qui vérifient l'égalité : $ax^2 + bx + c = 0$.
- Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont les racines du polynôme $ax^2 + bx + c$ et les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

Définition :

Le discriminant d'un polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est le nombre : $\Delta = b^2 - 4ac$.
Le discriminant permet la résolution d'une équation du second degré.

2. Théorème de résolution (admis).

Théorème : Racine(s) de l'équation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$.

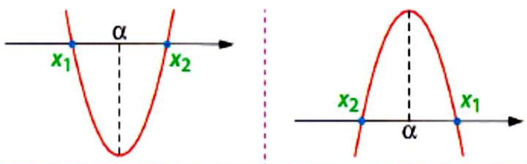
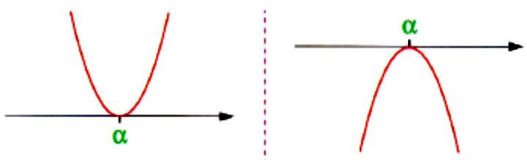
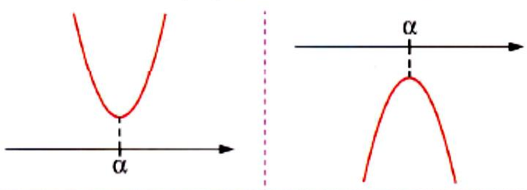
1er cas : $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors l'équation admet deux racines réelles distinctes qui sont :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2ème cas : $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ alors l'équation admet une racine double qui vaut : $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$.

3ème cas : $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors l'équation n'admet aucune racine réelle.

Le tableau ci-dessous récapitule ces différentes situations :

	Algébriquement	Graphiquement
	L'équation $ax^2+bx+c=0$ …	La parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ …
$\Delta > 0$ (positif)	… admet deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. On écrit $S = \{x_1 ; x_2\}$.	… traverse deux fois l'axe des abscisses. α est le milieu entre x_1 et x_2 : $\alpha = \dfrac{x_1+x_2}{2} = \dfrac{-b}{2a}$. 
$\Delta = 0$ (nul)	… admet une seule solution : $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$. On écrit $S = \{\alpha\}$.	… touche une seule fois l'axe des abscisses en α. 
$\Delta < 0$ (négatif)	… n'admet pas de solution. On écrit $S = \varnothing$.	… ne coupe pas l'axe des abscisses. 

Exercice n°2 :

Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $x^2 - x + 3 = 0$.
2) $-2x^2 + 9x - 4 = 0$.
3) $0{,}02x^2 + 0{,}1x - 1 = 0$.
4) $x(11 + 6x) = 35$.

Exercice n°3 :

Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $(x-3)(7-x) = 5$.
2) $\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x+2} = 0$.
3) $\dfrac{x^2 - x + 1}{x+1} = 2x + 3$.

Exercice n°4 :

Soit h la fonction polynôme du second degré définie sur IR par : $h(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$.

On donne son tableau de variations :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$h(x)$	$\nearrow$	9	$\searrow$

1) Quel est le signe de a ?
2) On sait, de plus, que la fonction h s'annule en $x_1 = -1$.
   a) Déterminer, **sans calculs**, la deuxième valeur x_2 pour laquelle la fonction h s'annule.
   b) Déterminer l'expression $h(x)$ en fonction de x.

3. Factorisation d'un trinôme du second degré.

Théorème :

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur IR par : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

1^er cas : $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors pour tout réel x, on a $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2^ème cas : $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ alors pour tout réel x, on a $f(x) = a(x - x_1)^2$ avec $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$.

3^ème cas : $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors f n'a pas de forme factorisée.

Exercice n°5 :

Donner les formes factorisées (lorsqu'elles existent) des polynômes du second degré suivants :

1) Pour tout réel x : $f(x) = -7x^2 + 4x - 1$.
2) Pour tout réel x : $g(x) = -3x + x^2 - 4$.
3) Pour tout réel t : $h(t) = 4t^2 - 24t + 36$.

Exercice n°6 :

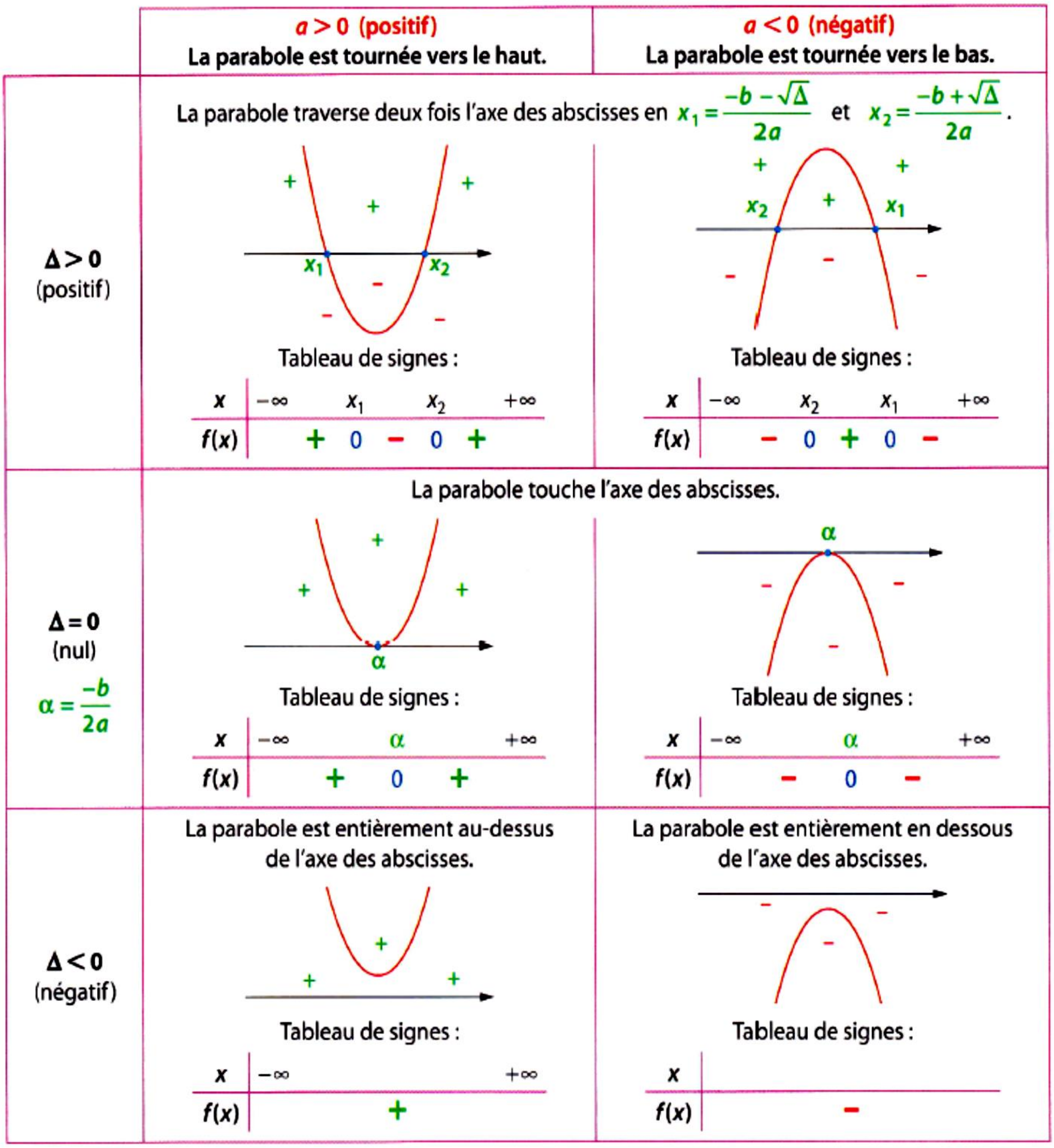
Pour tout $x \in$ IR/{–3 ; 4} simplifier l'expression suivante (on pensera à factoriser le numérateur et le dénominateur) : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - 2x - 24}$.

C) Signe du trinôme.

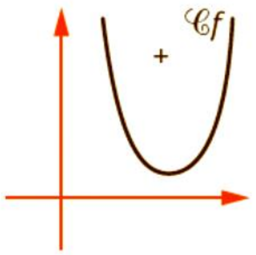
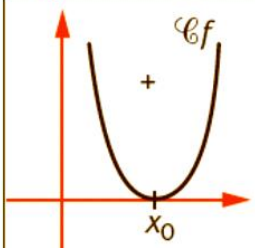
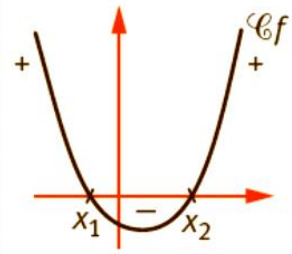
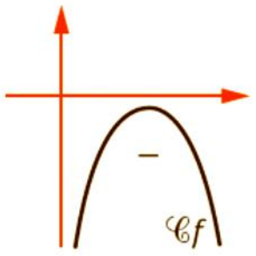
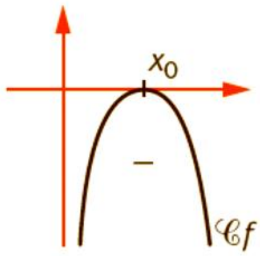
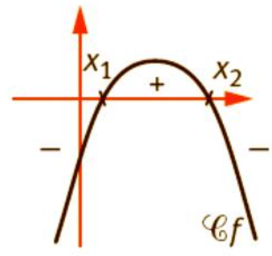
Théorème :

- Lorsque $\Delta > 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet deux racines réelles x_1 et x_2.
  Alors $f(x)$ et a sont de signes contraires entre x_1 et x_2 et de même signe à l'extérieur.
- Lorsque $\Delta = 0$, $f(x)$ est toujours du signe de a, sauf en $\dfrac{-b}{2a}$ où il vaut 0.
- Lorsque $\Delta < 0$, $f(x)$ est toujours du signe de a.

Le tableau ci-dessous récapitule ces différentes situations :



Bilan de la leçon

Signe de Δ	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Résolution de l'équation : $ax^2+bx+c=0$	L'équation **n'a pas** de solution dans $\mathbb{R}$.	L'équation admet une **unique** solution dans $\mathbb{R}$: $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.	L'équation admet **deux** solutions (dites racines) dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
Factorisation de ax^2+bx+c.	**Pas de** factorisation dans $\mathbb{R}$.	$f(x)=a\left(x-x_0\right)^2$.	$f(x)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$
Allure de la courbe :	$\mathscr{C}_f$ **ne coupe pas** l'axe des abscisses.	$\mathscr{C}_f$ coupe **une seule fois** l'axe des abscisses : au point d'abscisse x_0.	$\mathscr{C}_f$ coupe **deux fois** l'axe des abscisses : aux points d'abscisses x_1 et x_2.
Si $a > 0$:			
Si $a < 0$:			
Signe du trinôme	Le trinôme est **du signe de *a*** pour tout réel x.	Le trinôme est **du signe de *a*** pour tout réel x sauf pour $x = x_0$ où il est nul.	Le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire à a entre les racines.

Exercice n°7 :

1) Etudier le signe des trinômes suivants :

$$A(x) = -4x^2 + 3x - 4 \quad ; \quad B(x) = 11x^2 + 4x - 36 \quad \text{et} \quad C(x) = -2x^2 - 4x - 2.$$

2) Donner, si possible, la forme factorisée de ces trinômes.

Exercice n°8 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $x^2 - 8x + 12 < 0$.
2) $-9x^2 + 6x - 1 > 0$.
3) $-2x^2 - 4x + 1 \leq -x^2 + 6$.
4) $(x-1)(x^2 - 2x - 3) > 0$.

Exercice n°9 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $-\dfrac{1}{x} > x + 1$.
2) $\dfrac{1}{x+2} \geq \dfrac{x}{x+1}$.
3) $\dfrac{x-3}{-x^2 + x - 1} \geq 2$.

Exercice n°10 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 + 3x - 9$.

On note C_f la parabole représentant f et D la droite d'équation : $y = 3x - 1$.

1) Visualiser à la calculatrice les courbes C_f et D.
2) Préciser les abscisses des points où la courbe C_f traverse l'axe des abscisses.
3) Donner la forme canonique de f et déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4) Résoudre l'inéquation : $f(x) > 0$.
5) Interpréter graphiquement ce résultat.
6) Résoudre l'inéquation : $f(x) > 3x - 1$.
7) Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice n°11 :

Dans cet exercice vous ne pouvez utiliser le discriminant qu'une seule et unique fois !

Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = -x^2 + 8x + 65$.

1) Donner la forme canonique de P.
2) En déduire la forme factorisée de P.
3) En utilisant la forme la plus adaptée, répondre aux questions suivantes :
   a) Dresser le tableau de variations de P.
   b) Résoudre l'inéquation : $P(x) > 0$.
   c) Résoudre l'équation : $P(x) = 65$.
   d) Résoudre l'équation : $P(x) = x - 5$.
   e) Résoudre l'inéquation : $P(x) \geq -19$.

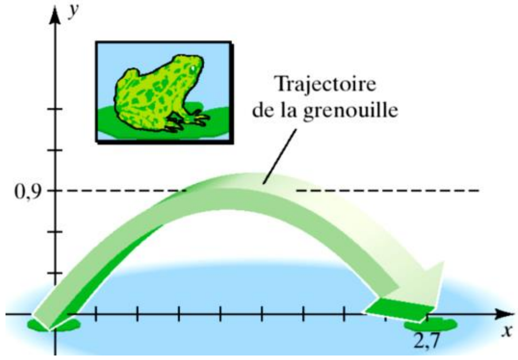
Exercice n°12 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x + m$.

1) Pour quelle(s) valeur(s) de m la parabole P passe-t-elle par le point $E(1\,;\,7)$?
2) Pour quelle(s) valeur(s) de m le minimum de la fonction f est-il égal à 9 ?
3) Pour quelle(s) valeur(s) de m la parabole représentative P de la fonction f coupe-t-elle l'axe des abscisses en un seul point ?

Exercice n°13 : Animaux sauteurs

Les bonds des animaux sauteurs sont typiquement des trajectoires paraboliques. La figure ci-dessous illustre le bond d'une grenouille superposé à un système de coordonnées. La longueur du saut est de $2{,}7\,m$ et la hauteur maximale au-dessus du sol est de $0{,}9\,m$.



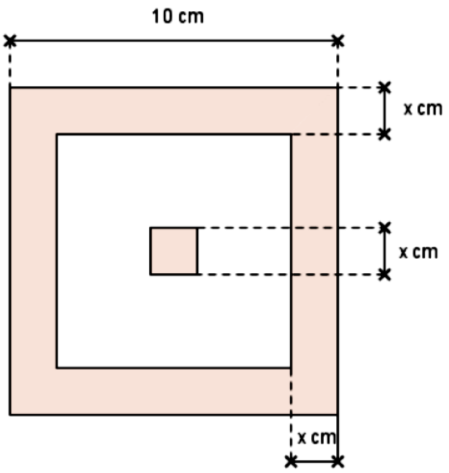
Sur quelle distance la grenouille a-t-elle été à plus de $0{,}5\,m$ de hauteur ?
On donnera tous les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Exercice n°14 :

Déterminer les couples solutions des systèmes suivants : $\begin{cases} x+y=126 \\ xy=3569 \end{cases}$.

Exercice n°15 :

Dans un carré de 10cm de côté, on a colorié une bande de largeur x cm et un carré de côté x cm centré comme sur la figure ci-dessous.
On note A la fonction qui donne, en fonction de x, l'aire du domaine coloré.



1) Quel est le domaine de définition de A ?
2) Montrer que l'aire $A(x)$ de l'enclos est définie par : $A(x)=-3x^2+40x$.
3) Donner la forme canonique de A.
4) Dresser le tableau de variations de A en justifiant ses variations.
5) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x, l'aire coloriée est supérieure ou égale à l'aire de la partie blanche.

Exercice n°16 :

Pour se rendre d'une ville A à une ville B distantes de 195km, deux cyclistes partent en même temps. L'un d'eux, dont la vitesse moyenne sur ce parcours est supérieure de 4km/h à celle de l'autre, arrive 1 heure plus tôt. Quelles sont les vitesses des deux cyclistes ?

Exercice n°17 : *Vrai – Faux avec justifications*

Soit f la fonction définie par : $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.

On note P sa courbe représentative et Δ son discriminant.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant rapidement votre réponse avec une propriété, un graphique, un contre-exemple…

1) Si $a>0$ alors f admet un minimum.
2) Si $a>0$, $b>0$ et $c>0$ alors pour tout réel x on a : $f(x)>0$.
3) Si pour tout réel x, $f(x)>0$, alors $\Delta>0$.
4) Si 1 est solution de l'équation $f(x)=0$ alors $a+b+c=0$.
5) Si $\Delta<0$ et $a<0$ alors l'inéquation $f(x)<0$ admet des solutions.
6) Si a et c sont de même signe alors f est factorisable.

Exercice n°18 :

On considère l'algorithme suivant :

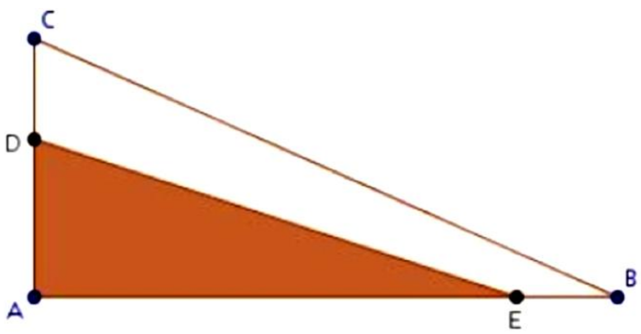
```
a=float(input("a="))
b=float(input("b="))
c=float(input("c="))
Delta=(b**2-4*a*c)
print("Delta =", Delta)
if Delta<0 :
    print("Pas de solution")
elif Delta==0 :
    print("Une solution double")
    print("x1 =", -b/(2*a))
else :
    print("Deux solutions distinctes")
    print("x1 =", (-b+(Delta)**0.5)/(2*a))
    print("x2 =", (-b-(Delta)**0.5)/(2*a))
```

1) Dans quel langage cet algorithme est-il tapé ?
2) Quel est le but de cet algorithme ?

Exercice n°19 :

Dans un triangle ABC rectangle en A, on place les points D et E respectivement sur $[AC]$ et $[AB]$ tels que $AD = BE = x$.

On sait que : $AB = 18m$ et $AC = 8m$.



Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire de ADE est inférieure à la moitié de l'aire du triangle ABC.