Interrogation de mathématiques
Niveau : 1ereS
Durée : 2heures
Calculatrice : autorisée
Thème : Loi Binomiale et échantillonnage

Exercice n°1 : Pots de confitures **(7pts)**

Une entreprise fabrique des pots de confiture. Les masses, exprimées en gramme, observées pour un échantillon de 1000 pots, pris au hasard et avec remise dans la production totale, ont donné les résultats ci-dessous :

Masse (en g)	[470;480[	[480;490[	[490;500[	[500;510[	[510;520[
Nombre de pots	70	130	440	260	100

1) En utilisant les centres des classes, calculer la moyenne et l'écart type de cet échantillon. On arrondira les résultats au gramme près.
2) D'après cette étude, quelle est la fréquence des pots dont la masse est inférieure à 490g ?
3) L'entreprise considère que les résultats de cette étude son suffisamment fiables pour admettre que la probabilité d'obtenir un pot d'une masse inférieure à 490g est 0,2.
   On prélève, au hasard 10 pots, successivement avec remise, dans la production totale.
   Soit X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 10 pots, associe le nombre de pots dont la masse est inférieure à 490 grammes.
   a) Quelle est la loi suivie par X ? Préciser les paramètres.
   b) Calculer $P(X=2)$. Arrondir au millième près.
   c) Calculer la probabilité qu'au moins un pot ait une masse inférieure à 490 grammes.
   d) Calculer la probabilité qu'entre 2 et 5 pots aient une masse inférieure à 490 grammes.
   e) Combien de pots ayant une masse inférieure à 490 grammes peut-on espérer ?
4) Le fabricant règle sa machine pour que la masse des pots soit comprise entre 480g et 510g.
   a) L'étude précédente, confirme-t-elle que la probabilité d'obtenir un pot dont la masse est comprise entre 480g et 510g est $p=0{,}83$.

   On prélève au hasard 150 pots. Le fabricant souhaite tester le réglage de sa machine.
   a) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pots dont la masse est comprise entre 480g et 510g. Préciser la loi suivie par Y et donner ses paramètres.
   b) Donner l'intervalle de fluctuation au seuil 95% de la fréquence obtenu à l'aide de la loi binomiale correspondant à la variable aléatoire Y.
   c) Parmi les 150 pots, on en obtient 111 dont la masse est comprise entre 480g et 510g. Peut-on affirmer, au seuil de 5% que la machine n'est pas correctement réglée ?

<u>Exercice 2</u> : Problème de coûts **(8pts)**

<u>Partie A</u> : Etude du Coût.

On s'intéresse au coût total de production de perles en verre, en centaines d'euros, pour une quantité $q \in [0\ ;\ 8]$ exprimée en tonnes donné par la formule : $C(q) = q^3 - 6q^2 + 40q + 100$.

1) Déterminer la dérivée C' de la fonction du coût total C.
2) Déterminer le signe de C' $[0\ ;\ 8]$ et en déduire les variations du coût total.

<u>Partie B</u> : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 8]$ par : $f(q) = 2q^3 - 6q^2 - 100$.

1) Calculer $f(0)$, $f(2)$ et $f(8)$.
2) Déterminer les variations de f sur $[0\ ;\ 8]$.
3) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [2\ ;\ 8]$.
4) Déterminer, à l'aide de la calculatrice une valeur exacte de α.
5) En déduire le signe de f sur $[0\ ;\ 8]$.

<u>Partie C</u> : Etude du Coût moyen.

On définit le coût moyen comme le rapport entre le coût total et le nombre d'unités produites.

On a donc la fonction coût moyen CM qui est définie pour $q \in]0\ ;\ 8]$ par : $CM(q) = \dfrac{C(q)}{q}$

1) Montrer que le coût moyen est donné pour $q \in]0\ ;\ 8]$ par : $CM(q) = q^2 - 6q + 40 + \dfrac{100}{q}$.
2) Etudier les variations de CM sur $]0\ ;\ 8]$ et dresser son tableau de variations sur $]0\ ;\ 8]$.
3) En déduire le coût moyen minimal et la quantité pour laquelle il est atteint.

<u>Exercice n°3</u> : Test de recrutement **(5pts)**

Une entreprise recherche trois personnes expérimentées pour occuper trois postes techniques importants. On a constaté, lors d'embauches précédentes, que parmi les candidats qui peuvent se présenter, 80% ont les compétences requises pour occuper ces postes.

Pour sélectionner les candidats, les recruteurs de l'entreprise élaborent un test. Ils estiment que :

- si une personne est compétente, elle a 85 chances sur 100 de réussir le test.
- si une personne est incompétente, elle a 20 chances sur 100 de réussir le test.

1) Une personne se présente pour le premier poste.
   a) Recopier et compléter le tableau suivant :

	Réussite au test	Échec au test	Total
Compétence	$0{,}85 \times 0{,}8 = 0{,}68$		0,8
Non compétence			
Total			1

   b) On note R l'événement : « la personne réussit le test ».
   Déduire du tableau précédent que : $P(R) = 0{,}72$ et en déduire $P(\overline{R})$.
2) Trois candidats se présentent pour pourvoir les trois postes. Ils subissent successivement le test de façon indépendante. On admet que la probabilité de réussite au test est de 0,72 pour chacun. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de candidats, parmi les trois, réussissant le test.
3) Quelle est la loi suivie par X (justifications attendues) ? Déterminer ses paramètres n et p.
   a) Calculer $P(X = 3)$.
   b) Calculer la probabilité qu'exactement deux candidats sur les trois réussissent le test.
   c) Calculer $E(X)$. Interpréter ce résultat.

Le barème de ce devoir n'est qu'indicatif, il se peut donc qu'il soit légèrement modifié.