

Interrogation de mathématiques
Classe : TES
Durée : 1h00
Calculatrice : autorisée
Thème : Problèmes d'évolutions et graphe probabiliste

Exercice n°1 : Bac ES Amérique du Nord 2013

Une étude est réalisée chaque hiver sur une population composée de personnes qui peuvent pratiquer le ski de piste ou le snowboard. L'étude révèle que :

- Si une personne pratique le ski de piste, alors la probabilité qu'elle pratique le snowboard l'hiver suivant est égale à 0,2.
- Si une personne pratique le snowboard, alors la probabilité qu'elle pratique le ski de piste l'hiver suivant est égale à 0,3.

On note S l'état : « la personne pratique le ski de piste » et \bar{S} l'état : « la personne pratique le snowboard ».

On note également pour tout entier naturel n :

- p_n la probabilité qu'une personne pratique le ski de piste lors du $n^{\text{ième}}$ hiver ;
- q_n la probabilité qu'une personne pratique le snowboard lors du $n^{\text{ième}}$ hiver ;
- $P_n = (p_n \quad q_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système lors du $n^{\text{ième}}$ hiver.

On suppose que la population initiale ne comporte que des personnes pratiquant le ski de piste, on a donc $P_0 = (1 \quad 0)$.

Partie A :

- 1) Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets S et \bar{S} .
- 2) Donner la matrice de transition M de ce graphe probabiliste.
- 3) Calculer M^2 et déterminer l'état probabiliste P_2 .
- 4) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,3$.
- 5) On considère l'algorithme suivant :

Variables :	
①	J et N sont des entiers naturels
②	p est un nombre réel
Entrée :	
③	Saisir N
Initialisation :	
④	p prends la valeur 1
traitement :	
⑤	Pour J allant de 1 à N
⑥	p prend la valeur
⑦	Fin Pour
Sortie :	
⑧	Afficher p

Recopier et compléter la ligne 6 de cet algorithme afin d'obtenir la probabilité p_n .

Partie B :

On considère, pour tout entier naturel n , l'évènement S_n : « la personne pratique le ski de piste lors du $n^{\text{ième}}$ hiver ». La probabilité de l'évènement S_n est notée $P(S_n)$.

On a donc $p_n = P(S_n)$.

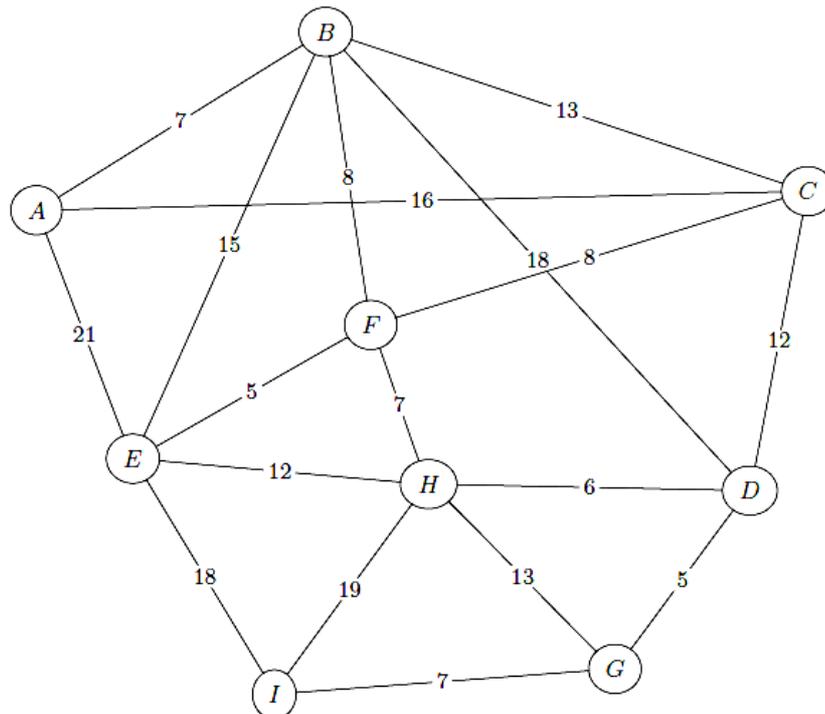
On sait, d'après la **Partie A**, que pour tout entier naturel n , on a : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,3$.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = p_n - 0,6$.

- 1) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et préciser la valeur de u_0 .
- 2) En déduire l'expression de u_n puis l'expression de p_n en fonction de n .
- 3) Déterminer la limite de la suite p_n et interpréter le résultat.

Partie C :

Une partie du domaine skiable est représentée par le graphe ci-dessous. Le sommet A représente le haut des pistes de ski et le sommet I en représente le bas. Les sommets B , C , D , E , F , G et H représentent des points de passages. Chacune des arêtes est pondérée par la distance, en centaine de mètres, entre deux sommets.



Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, la distance minimale permettant de relier le sommet A au sommet I .