Nombres, calculs et intervalles

A) Calculer avec des écritures fractionnaires.

1. Egalité entre deux fractions.

Définition :

a, b, c et d sont des réels, $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $ad = bc$
- Si $ad = bc$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Ces deux énoncés peuvent être rassemblés sous la forme :

$$ad = bc \ (b \neq 0 \text{ et } d \neq 0) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

2. Opérations avec les fractions.

Propriétés :

a, b, c et d sont des réels, $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

1) Si les dénominateurs sont les mêmes :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

2) Si les dénominateurs sont différents :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

Propriétés :

a, b, c et d sont des réels, $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

1) Multiplication : que les dénominateurs soient les mêmes ou non :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

2) Division : que les dénominateurs soient les mêmes ou non :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Exercice n°1 :

Ecrire les nombres suivants sous forme de fractions irréductibles :

$$A = \frac{6}{35} + \frac{4}{5} \div \frac{3}{4}$$

$$C = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5} + 1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$B = \frac{20}{8} + \frac{3}{14} \times \frac{4}{9}$$

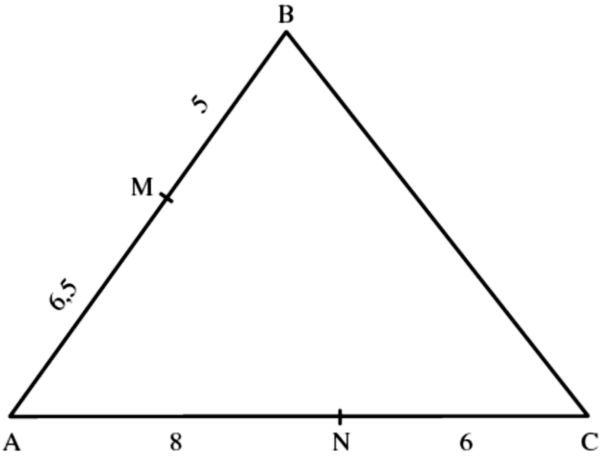
$$D = \frac{\left(3 - \frac{2}{5}\right)}{2 \times \frac{4}{5} - \frac{2}{3}}$$

Vidéo : effectuer des calculs de fractions

Vidéo : réduire au même dénominateur

Exercice n°2 :

Sur la figure ci-après, ABC est un triangle. M est un point du segment $[AB]$ tel que $AM = 6,5$ et $MB = 5$. N est un point du segment $[AC]$ tel que $AN = 8$ et $NC = 6$.



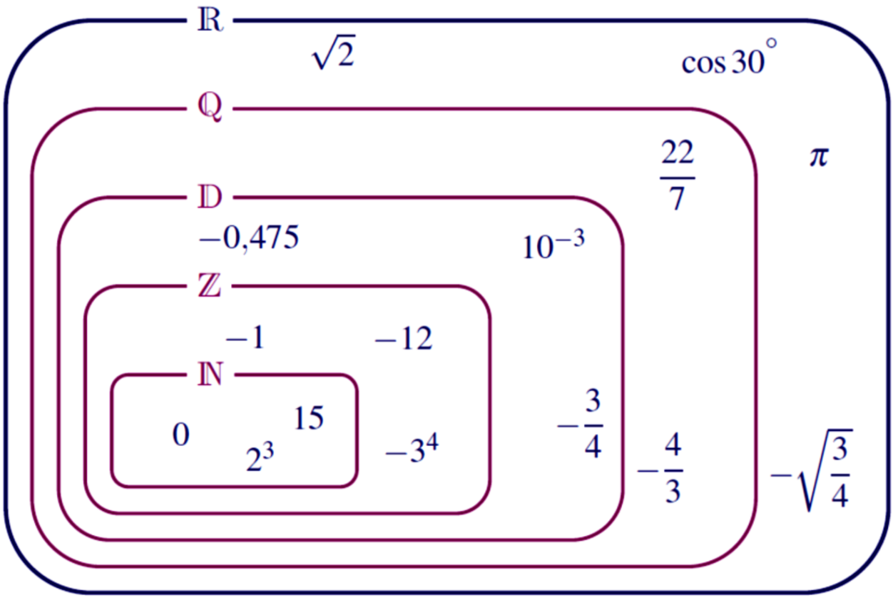
Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

B) Les différents ensembles de nombres.

Définition :

- $\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;\dots\}$
- $\mathbb{Z}$ ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\dots;\ -2\,;\ -1\,;\ 0\,;1\,;2\,;\dots\}$
- $\mathbb{D}$ ensemble des décimaux : $\mathbb{D} = \left\{\frac{a}{10^p} \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } p \in \mathbb{N}\right\}$
- $\mathbb{Q}$ ensemble des nombres rationnels : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^*\right\}$
- $\mathbb{R}$ ensemble des nombres réels : $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{irrationnels :\ \sqrt{3}\,;\ \pi\,;\cos 30\ ;\dots\}$

Remarque : Tous ces ensembles sont inclus les uns dans les autres : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



Vidéo : [reconnaître la nature d'un nombre]

Exercice n°3 :

Compléter le tableau suivant en cochant la ou les cases valides :

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$-8{,}3$					
$-\frac{4}{2}-\frac{4}{2}$					
$\frac{3}{5}$					
$\frac{1}{3}$					
$\sqrt{9}$					
$\sqrt{2}$					
π					
$\frac{\sqrt{144}}{20}$					
72×10^{-2}					

C) Développer, factoriser.

1. Développement.

Propriétés :

Soient a, b, c et d des réels, on a alors :

1) **Simple distributivité** : $a(b+c) = a \times b + a \times c$
2) **Double distributivité** : $(a+b)(c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

Vidéo : développer une expression simple

Vidéo : développer une expression complexe

Exercice n°4 :

Développer, réduire et ordonner.

$A = -6(-3x-7)$

$B = 2x(4x-5)$

$C = (5x-4) \times 4x$

$D = -8a + 2(3a-5)$

Exercice n°5 :

Développer, réduire et ordonner.

$A = 2x + 3(5x-2)$

$B = (-8x+5)(-2x+4)$

$C = 4x^2 + 5 + (2x-4)(3x+6)$

$D = (-5x-6)(-2x+8) - (3+5x)(4-2x)$

2. Factorisation.

Propriétés :

Soient a, b et c des réels, on a alors : $a \times b + a \times c = a(b+c)$.

Vidéo : factoriser avec facteur commun

Exercice n°6 :

Factoriser, si possible, les expressions suivantes :

$A = 4 + 16x$.

$B = -7x^2 - 15x$

$C = (x+1)(x-5) + (2x+3)(x+1)$

$D = (2x-1)(3x+2) + 2x - 1$

D) Puissances.

1. Puissance d'exposant positif.

Définition :

Si a est un nombre relatif et si n est un entier supérieur ou égal à 2 :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \dots a \times a}_{n\ facteurs\ \text{égaux à}\ a}$$

Le nombre n de l'expression a^n est appelé « exposant ».

2. Puissance d'exposant négatif.

Définition :

a^{-n} est l'inverse de a^n :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \times a \times a \dots a \times a} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \dots \times \frac{1}{a}$$

Propriétés :

Pour tous les entiers m, n et pour tous les nombres non nuls a et b :

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$

Vidéo : appliquer les formules sur les puissances

Vidéo : effectuer des calculs de puissances

Exercice n°7 :

Ecrire, quand c'est possible, les expressions sous la forme a^n avec a le plus petit entier possible :

1) $6^2 \times 6^3$
2) $\dfrac{5^7}{5^4}$
3) $2^3 \times 5^3$
4) $7^9 + 7^9$
5) $5^2 \times 5^{-4}$
6) $4^6 \times (-9)^6$
7) $5^6 \times 6^5$
8) $3^{12} \times (5^2)^6$
9) $0{,}5^4 \times (-4)^4$
10) $\dfrac{7^8}{8^{13}}$
11) $4^3 \times 125$
12) $\dfrac{3}{3^{-4}}$

Exercice n°8 :

Effectuer les calculs suivants :

1) $(-4)^2$
2) -4^2
3) $5 - 7 \times 10^2$
4) $(5 - 7) \times 10^2$
5) $\dfrac{-5^2}{3}$
6) $7 + 3^2$
7) $2 + 5^2 \times 4$
8) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^2$
9) $\dfrac{2^2}{5}$
10) $\left(\dfrac{-5}{3}\right)^2$
11) $(7 + 3)^2$
12) $(6 \times 3)^2$

E) Intervalles.

1. Définition.

<u>Définition</u> :

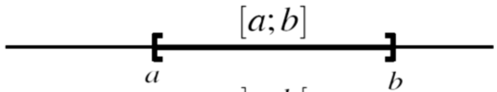
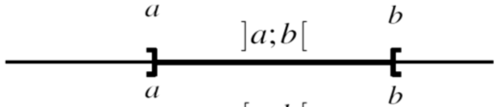
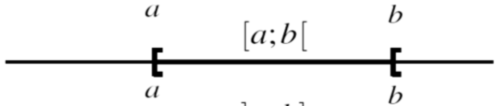
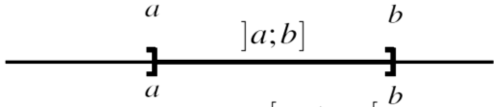
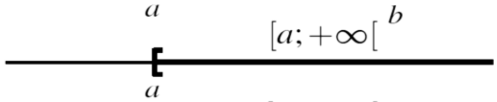
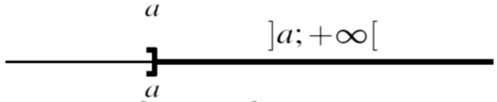
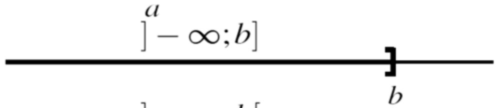
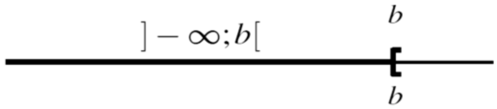
L'ensemble des nombres réels compris, au sens large, entre deux nombres a et b est noté :

$$[a\,;b]$$

C'est un intervalle qui désigne ici tous les nombres réels x tels que :

$$a \leq x \leq b$$

Le tableau ci-dessous résume les différents types d'intervalles :

Notation	Nombres x	Représentation d'un exemple
$[a\,;b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a\,;b[$	$a < x < b$	
$[a\,;b[$	$a \leq x < b$	
$]a\,;b]$	$a < x \leq b$	
$[a\,;\,+\infty[$	$x \geq a$	
$]a\,;+\infty[$	$x > a$	
$]-\infty\,;b]$	$x \leq b$	
$]-\infty\,;b[$	$x < b$	

<u>Remarque</u> :

- On dit qu'un intervalle est fermé lorsque ses deux bornes sont incluses dans l'intervalle.
- On dit qu'un intervalle est ouvert lorsque ses deux bornes sont exclues de l'intervalle.
- L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est ouvert car $\mathbb{R} =]-\infty\,;\,+\infty[$.
- L'ensemble vide se note : $\emptyset$.

<u>Vidéo</u> : [noter les intervalles]

<u>Vidéo</u> : [déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle]

<u>Exercice n°9</u> :

Traduire chacune des inégalités suivantes en intervalle :

1) $-2 < x \leq 7$
2) $x \geq -1$
3) $-11 \leq x < -9$
4) $x < 3$
5) $x \geq 5$
6) $-0{,}1 < x < 0{,}1$

2. Réunion et intersection d'intervalles.

Définition :

La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B (ou aux deux). Le « ou » mathématiques est dit inclusif.
Cet ensemble est noté : $A \cup B$.

Définition :

L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.
Cet ensemble est noté : $A \cap B$

Exemples :

Dans chacun des cas suivants déterminons l'intersection des intervalles I et J :

1) $I = [-4\,;\,7]$ et $J =]0\,;\,10]$.
On peut représenter la situation à l'aide d'une droite graduée, on a alors :

- On obtient $I \cap J =]0\,;\,7]$ (là où les deux traits sont superposés).
7 appartient aux deux ensembles mais 0 à un seul c'est pourquoi il est exclu.
- On obtient $I \cup J = [-4\,;\,10]$ (là où il y a au moins un trait).

2) $I = [1\,;\,5]$ et $J =]3\,;\,+\infty[$.
On peut représenter la situation à l'aide d'une droite graduée, on a alors :

- On obtient $I \cap J =]3\,;\,5[$(là où les deux traits sont superposés).
- On obtient $I \cup J = [1\,;\,+\infty[$ (là où il y a au moins un trait).

Vidéo : déterminer l'intersection d'intervalles

Vidéo : déterminer la réunion d'intervalles

Exercice n°10 :

Dans chacun des cas, déterminer l'intersection et la réunion des intervalles I et J :

1) $I = [-8\,;\,8]$ et $J = [-2\,;\,12]$
2) $I =]0\,;\,\sqrt{2}]$ et $J = [1\,;\,+\infty[$
3) $I =]1\,;\,8[$ et $J = [5\,;\,9]$
4) $I =]6\,;\,9[$ et $J = [7\,;\,8]$
5) $I =]-12\,;\,1[$ et $J = [1\,;\,5]$

Exercice n°11 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $4x - 5 = 9x + 4$
2) $3x - 8 = -7x + 2$
3) $x - 3(7x - 2) = 5 - (2 - x)$
4) $\dfrac{4}{x} = \dfrac{9}{5}$
5) $\dfrac{1}{3}x = \dfrac{8}{9} - \dfrac{5}{6}x$

Vidéo : résoudre une équation

Exercice n°12 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et donner les solutions sous forme d'intervalle :

1) $x-6>8$
2) $8-x\geq 3$
3) $8x+11<3x-4$
4) $2x+9\geq 3x-2$
5) $3(2x-5)>8-(3x+1)$
6) $3-5(2x-2)\leq 4-5(x+2)$

Vidéo : résoudre une inéquation

Exercice n°13 :

1) Donner un encadrement à 10^{-2} de $\sqrt{5}$.
2) Donner un encadrement à 10^{-3} de π.
3) Donner un encadrement à 10^{-1} de $\cos 54$.
4) Donner un encadrement à 10^{-4} de $\frac{1}{3}$.
5) Donner un encadrement à 10^{-3} de $0{,}9999999$.

Vidéo : donner un encadrement d'un nombre réel

Exercice n°14 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $(2x+4)(-7x+14)=0$
2) $-x(5-4x)=0$
3) $2x(x-1)-3(x-1)=0$
4) $(2-x)(3x+4)+(7x+4)(2-x)=0$
5) $(4x-7)(9x+5)=(8x-3)(4x-7)$

Vidéo : résoudre une équation-produit

Exercice n°15 :

Avant d'effectuer sa tournée un représentant fait le plein d'essence. Au cours de ses déplacements, il rajoute dans son réservoir une première fois $24{,}7$ litres d'essence et une deuxième fois $18{,}9$ litres. À son retour, il constate qu'il manque $11{,}5$ litres pour refaire le plein du réservoir d'une capacité de 60 litres. Sachant que la consommation moyenne du véhicule est de $5{,}8$ litres pour 100 kilomètres, quelle est la distance parcourue par ce représentant au cours de sa tournée ?

Exercice n°16 :

Un sac opaque contient 120 boules toutes indiscernables au toucher, dont 30 sont bleues.
Les autres boules sont rouges ou vertes. On considère l'expérience aléatoire suivante : on tire une boule au hasard, on regarde sa couleur, on repose la boule dans le sac et on mélange.
La probabilité de tirer une boule rouge est égale à $0{,}4$.
Quel est le nombre de boules vertes dans le sac ?

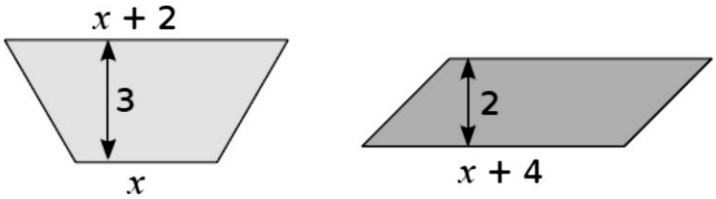
Exercice n°17 :

1) Un marchand dépense 75€ par semaine pour confectionner ses glaces. Sachant qu'une glace est vendue $2{,}50$€, combien doit-il vendre au minimum de glaces dans la semaine pour avoir un bénéfice supérieur à 76€ ?
2) Le ciné-club d'un village propose deux tarifs :
   - $Tarif\ A$: une carte d'adhésion pour l'année coutant 21 euros, puis $1{,}5$ euros par séance ;
   - $Tarif\ B$: 5 euros par séance sans carte d'adhésion.

   a) Calculer, pour chaque tarif, le prix payé pour 8 séances.
   b) Pour combien de séances le $Tarif\ B$ est-il plus avantageux que le $Tarif\ A$?

<u>Exercice n°18</u> :

Soient le trapèze et le parallélogramme ci-dessous.



Les mesures sont dans la même unité.
Quelle doit être la valeur de x pour que le trapèze ait la même surface que le parallélogramme ?