Fonction exponentielle

A) Introduction.

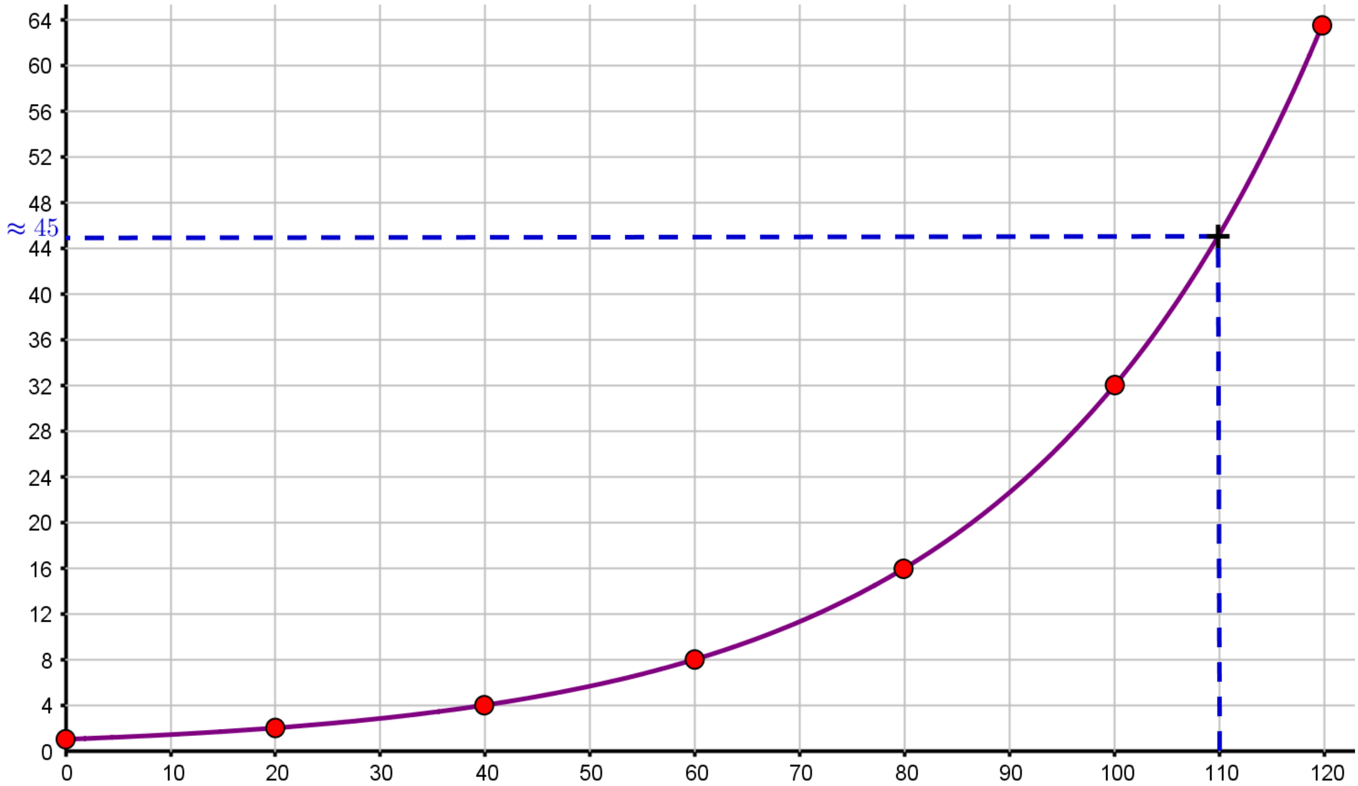
1. Evolution d'une population de bactéries.

Une population initiale de $N_0 = 1$ centaine de milliers de bactéries double toutes les vingt minutes.
Le tableau suivant, donne le nombre de bactéries $N(t)$ en centaine de milliers toutes les vingt minutes :

t	0	20	40	60	80	100	120
$N(t)$	1	2	4	8	16	32	64

Ce tableau ne permet pas de d'obtenir la valeur de $N(t)$ entre deux instants consécutifs.

Pour estimer $N(110)$, on représente graphiquement les valeurs données dans le tableau précédent. En les joignant par une ligne continue, on pourra ainsi évaluer le nombre de bactéries au bout de 110 minutes.



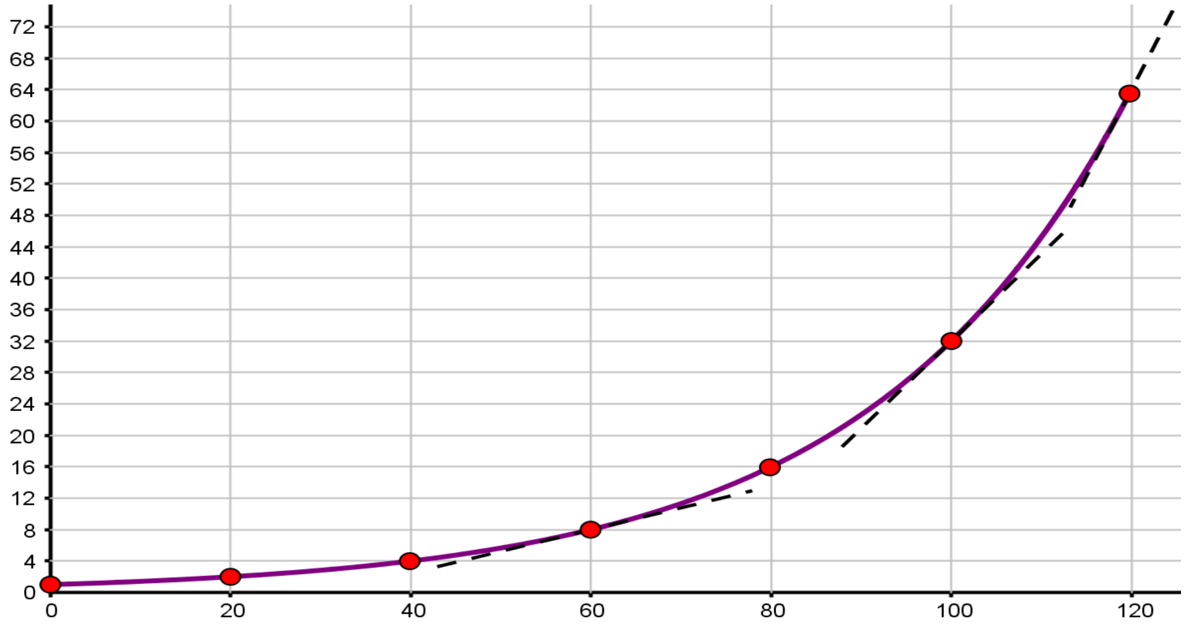
La lecture graphique permet de conclure que la population sera d'environ 4,5 millions de bactéries.

Cette méthode, si elle présente l'avantage de la simplicité et de la rapidité, n'est pas totalement satisfaisante car elle ne nous donne qu'une valeur très approximative du résultat.

Afin d'obtenir une valeur plus précise, nous allons donc chercher à déterminer quelles sont les propriétés de la fonction $t \mapsto N(t)$ correspondant à la courbe que nous avons obtenue en joignant par une ligne continue les points.

2. Une nouvelle fonction ?

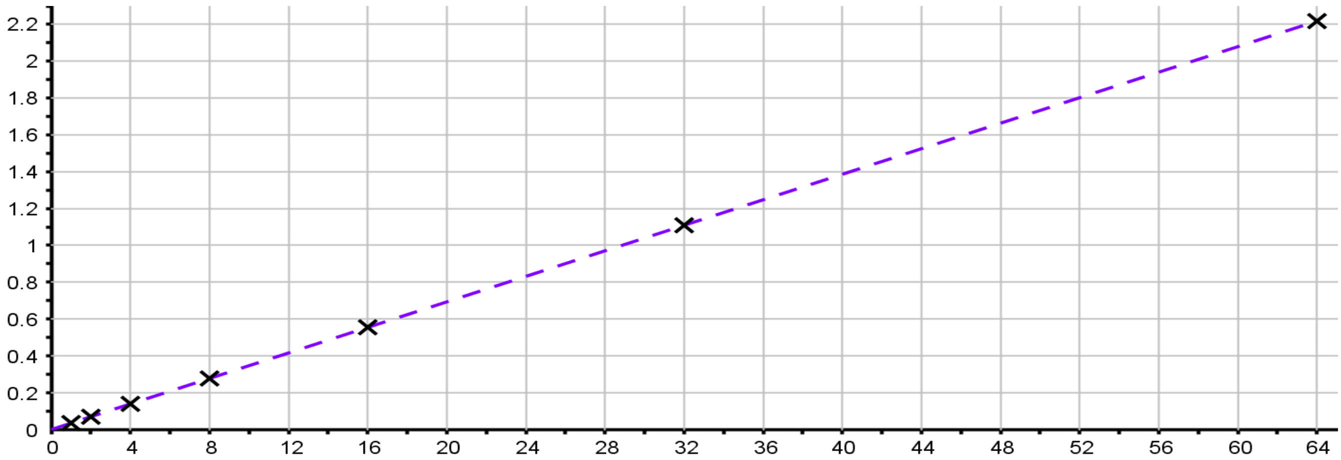
Une des premières observations que l'on peut faire est que la courbe obtenue « monte » de plus en plus rapidement comme le montre les tangentes à cette courbe représentées ci-dessous :



On peut, à l'aide du logiciel $GeoGebra$, obtenir les coefficients directeurs de ces tangentes, et donc les valeurs des nombres dérivées $N'(t)$ correspondants, ce qui donne le tableau suivant :

t	0	20	40	60	80	100	120
$N(t)$	1	2	4	8	16	32	64
$N'(t)$	0,035	0,069	0,139	0,277	0,555	1,109	2,218

Les valeurs de $N(t)$ et $N'(t)$ semblant proportionnelles, on trace un graphique en reportant les valeurs de $N(t)$ sur l'axe des abscisses et celles de $N'(t)$ sur l'axe des ordonnées, on obtient alors :



Ce graphique met en évidence une relation de proportionnalité entre $N'(t)$ et $N(t)$.
On a donc $N'(t) = a \times N(t)$ où a est un réel correspondant au coefficient directeur de la droite ci-dessus.

Aucune des fonctions qui nous avons étudiées jusqu'à présent n'ayant cette particularité, nous allons nous intéresser aux propriétés de la fonction $t \mapsto N(t)$ qui découlent de cette relation de proportionnalité.

Dans la suite de chapitre nous allons commencer par étudier le cas $a = 1$ c'est-à-dire :

$$N'(t) = N(t)$$

B) Fonction exponentielle.

1. Existence et unicité de la fonction exponentielle (admises).

Théorème :

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f \text{ et } f(0) = 1$$

On nomme cette fonction exponentielle et on la note : exp.

2. Relation fonctionnelle et positivité.

Théorème :

Soit x et y deux réels, on a alors :

$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y).$$

Remarque : cette relation s'appelle la relation fonctionnelle car on pourrait définir l'exponentielle à partir de cette propriété pour retrouver que l'exponentielle est égale à sa dérivée.

Théorème :

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
On a donc $\forall x \in \mathbb{R} \ \exp(x) > 0$.

3. Autres opérations.

Théorème :

Soit x et y deux réels et n un entier naturel, on a alors les relations :

1) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

2) $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

3) $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$

4. Notations.

Définitions :

Du fait des propriétés similaires entre la fonction exponentielle et les puissances, on pose :

- $e = \exp(1) \approx 2{,}718$.
- $e^x = \exp(x)$.

Soit x et y deux réels et n un entier naturel, on a alors les relations :

1) $e^{x+y} = e^x \times e^y$

2) $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

3) $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

4) $e^{nx} = (e^x)^n$

Vidéo : appliquer les formules sur la fonction exponentielle de base *e*

Exemple : Solution de problème sur l'évolution d'une population de bactéries !

1) En utilisant la relation fonctionnelle de la page précédente et en remarquant que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$$

On obtient les deux égalités suivantes :

•	$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \times \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0$
•	$\forall x \in \mathbb{R} \ \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\exp(x)}$

2) On admet que la fonction N (étudiée en **A)** **Introduction.**) vérifie la relation précédente ainsi que les propriétés de la fonction exponentielle.
   - $N(20 \div 2) = \sqrt{N(20)} = N(10)$.
   - A l'aide de la relation fonctionnelle : $N(110) = N(100) \times N(10) = N(100) \times \sqrt{N(20)}$.
   - En déduire que le nombre de bactéries présentent au bout de 110 minutes est $4\ 525\ 483$.

C) Etude de la fonction exponentielle.

Le but de ce chapitre est de construire une des fonctions mathématiques les plus importantes. Elle est en effet présente dans toutes les sciences. Sa construction à partir de l'équation différentielle $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$ (comme elle a été présentée dans ce chapitre) est passionnante, bien qu'historiquement elle ne se soit pas construite ainsi.

1. Signe et variation.

Théorème :

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. On a donc $\forall x \in \mathbb{R} \ \ e^x > 0$.

Théorème :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		
$\exp(x)$		1	e	

Démonstration :

On a démontré précédemment que $\forall x \in \mathbb{R} \ \ (e^x)' = e^x > 0$.
Donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Vidéo : dériver une fonction exponentielle

Vidéo : étudier une fonction exponentielle

2. Conséquences : équations et inéquations.

Règles :

La fonction exponentielle étant strictement croissante, on peut écrire les équivalences suivantes :

- $e^a = 1 \iff a = 0$.
- $e^a = e^b \iff a = b$.
- $e^a > 1 \iff a > 0$.
- $e^a > e^b \iff a > b$.

Vidéo : équation avec des exponentielles

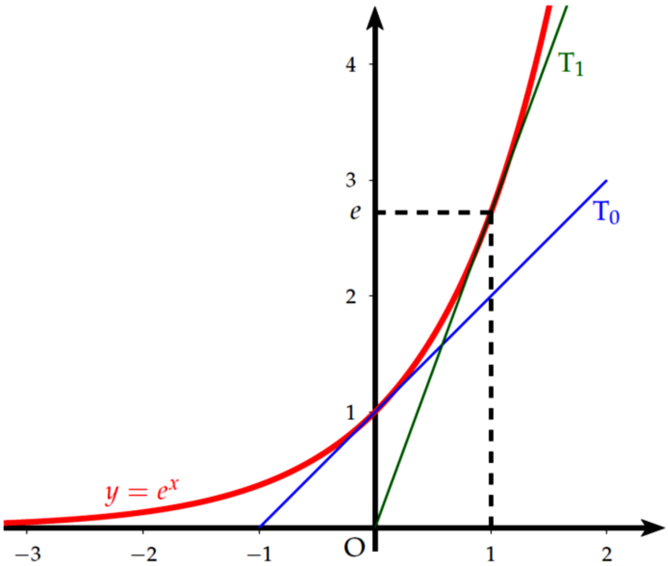
Vidéo : inéquation avec des exponentielles

Exemples :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x^2+3} = e^{7x}$.
   D'après ce qui précède, l'équation est équivalente à :
   $2x^2 + 3 = 7x \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0$
   $\Delta = 49 - 4 \times 3 \times 2 = 25 > 0$.
   Donc l'équation $2x^2 - 7x + 3 = 0$ on admet les deux solutions réelles :
   $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{7+\sqrt{25}}{4} = \dfrac{12}{4} = 3 \\ x_2 = \dfrac{7-\sqrt{25}}{4} = \dfrac{2}{4} = 0{,}5 \end{cases}$$
   Donc $e^{2x^2+3} = e^{7x} \Leftrightarrow x \in \{0{,}5\,;3\}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $e^{3x} \leq e^{x+6}$.
   D'après ce qui précède, l'équation est équivalente à :
   $3x \leq x + 6 \Leftrightarrow 2x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 3$
   Donc $e^{3x} \leq e^{x+6} \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;3]$.

3. Courbe représentative et tableau de variation.



L'équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0 est :
$T_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0) = 1(x-0) + 1 = x + 1$ car $f(0) = e^0 = 1$ et $f'(0) = e^0 = 1$

L'équation de la tangente T_1 au point d'abscisse 1 est :
$T_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1) = e(x-1) + e = ex$ car $f(1) = e^1 = e$ et $f'(1) = e^1 = e$

D'après les renseignements obtenus, jusqu'à présent on a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		+		
$\exp(x)$	↗	1 ↗	e ↗	

<u>Exercice n°1</u> :

Simplifier, quand c'est possible, les expressions suivantes :

$A = \dfrac{e^2 \times e^3}{e}$

$B = (e^3)^{-1} \times \dfrac{e^4}{e^{-2}}$

$C = (e^2)^2 \times \dfrac{e^{-3}}{e}$

$D = \dfrac{(e^{-1})^4}{e^{0,5}}$

$E = e^3 - e^2$

$F = (e^x)^5 \times (e^{-2x})^2$

$G = \dfrac{(e^{-x})^4}{e^{2x}}$

$H = 3e^3 - e^{3x}$

<u>Exercice n°2</u> :

1) Ecrire le plus simplement possible les deux fonctions suivantes :
   $f(x) = e^{3x+4} \times e^{-x+1}$

   $g(x) = \dfrac{e^{x+1} \times (e^x)^3 \times e}{e^{2x-1}}$

2) Soit x un réel, montrer que :
$$(e^x - 2)(e^x + 4) = e^{2x} + 2e^x - 8$$

3) Factoriser l'expression :
$$2xe^x - 3x^2e^{2x}$$

<u>Exercice n°3</u> :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $e^{3x} = 1$
2) $e^{-x^2} = e^{2x+1}$
3) $e^{-x} - e^x = 0$
4) $e^{5x} = -1$
5) $xe^{2x} - 2e^{2x} = 0$

<u>Exercice n°4</u> :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $e^{2x} \leq 1$
2) $e^{-2x} - e^x > 0$
3) $e^{-x^2} \leq e^{2x+1}$
4) $\dfrac{e^x + 3}{e^x - 1} > 0$
5) $e^{x^3+3x+1} > 0$
6) $xe^{-x} - 3e^{-x} \leq 0$

D) Construction de l'exponentielle : méthode d'Euler (mentionnée dans le programme).

On cherche à construire une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$

On rappelle que pour tout réel x, $f'(x)$ est obtenu comme limite du quotient suivant :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{lorsque } h \text{ tend vers } 0$$

D'après la définition de la fonction exponentielle $f(x) = f'(x)$, on a donc en première approximation :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \approx f'(x) = f(x)$$

Ce qui nous amène à l'approximation d'Euler : $f(x+h) \approx f(x) + hf(x)$ pour h proche de 0

On va utiliser cette relation pour construire une approximation de la courbe de l'exponentielle sur [0 ; 1] en plaçant un grand nombres points vérifiant les conditions suivantes :

- $f(0) = 1$, on part donc du point $A(0\,;\,1)$;
- On place de proche en proche les n points suivants en passant de $A_n\big(a\,;\,f(a)\big)$ à A_{n+1} en calculant :

$$f(a+h) \approx f(a) + h \times f(a) \ \text{ avec } \ h = \frac{1}{n} \ \Rightarrow \ A_{n+1}\big(a+h\,;\,f(a)+h\times f(a)\big)$$

On donne ci-dessous un algorithme générant deux listes contenant les coordonnées de ces $n+1$ points :

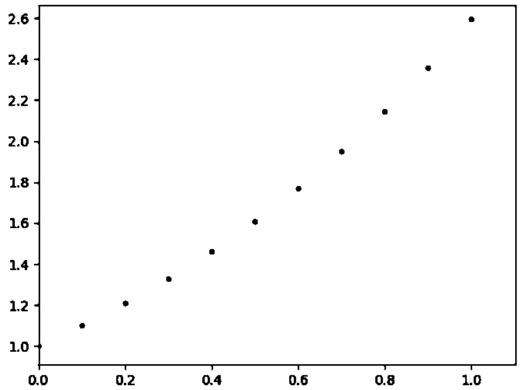
```
def Exponentielle_Euler(n) :
    h=1/n
    x=0
    y=1
    Lx=[0]
    Ly=[1]
    for i in range(n) :
        x=x+h
        y=y+h*y
        Lx.append(x)
        Ly.append(y)
    plt.plot(Lx,Ly,'.')
    plt.show()
```

Indications :

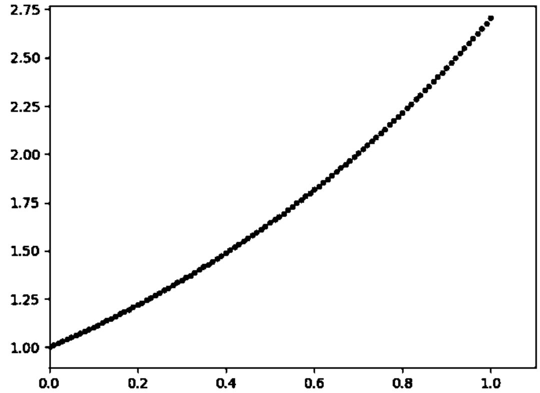
- la notation « plt, plot(x y ′,′) » signifie « placer le point de coordonnées (x y) dans un repère. »
- la notation « plt, show » signifie « afficher le graphique ».
- la notation « Lx, append(x) » signifie « ajouter la valeur x à la fin de la liste Lx. »

On obtient alors :

$n = 10$



$n = 100$



On remarque que plus n est grand, plus la courbe est précise ce qui est logique car plus n devient grand plus h devient petit et se rapproche donc du h tend vers 0 du nombre dérivé.

E) Approximation de e^1 avec une suite (u_n) (mentionnée dans le programme).

Dans la Partie D), avons utilisé l'algorithme ci-dessous pour la construire la courbe représentative de la fonction l'exponentielle par la méthode d'Euler :

- $f(0) = 1$, on part du point $A_0(0\,;\,1)$;
- On construit de proche en proche les n points suivants en partant de $f(a)$, puis en calculant :

$$f(a+h) \approx f(a) + h \times f(a) \text{ avec } \quad h = \frac{1}{n}$$

$$f(a+h) \approx f(a) + \frac{1}{n} \times f(a) = f(a) \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

On peut donc en déduire les coordonnées des deux points suivants :

$$A_1\left(\frac{1}{n}\,;\left(1+\frac{1}{n}\right)^1\right) \quad \text{car} \quad f\left(0+\frac{1}{n}\right) = f(0) \times \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 \times \left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^1$$

$$A_2\left(\frac{2}{n}\,;\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right) \quad \text{car} \quad f\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) \times \left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right) \times \left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

On peut en déduire que, pour n fixé, le dernier point a pour coordonnées :

$$A_n\left(1\,;\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

On considère maintenant la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

On en déduit que quand n devient grand la suite (u_n) tend vers e car on sait que le point $E(1\,;e)$ appartient à la courbe représentative de la fonction exponentielle et que l'ordonnée de A_n est une approximation de l'ordonnée du point E obtenue avec la méthode d'Euler qui est d'autant plus précise que n devient grand.

On s'intéresse maintenant à la vitesse de convergence de cette suite en cherchant quelle est la plus petite valeur de n qui permette une approximation à 10^{-5} de e.
On considère donc l'algorithme suivant :

```
n=1
yA=1+1/n
while exp(1)-yA>10**-5 :
    n=n+1
    yA=(1+1/n)**n
print("n=",n)
```

On a lancé cet algorithme on a obtenu l'affichage ci-dessous :

« $n = 135\,913$ »

On peut en déduire que, si cet algorithme tend bien vers e, la vitesse de convergence est néanmoins assez faible car il faut attendre le $135\,914^{\text{ème}}$ terme pour obtenir une précision à 10^{-5} de e.

F) Compléments sur la fonction exponentielle.

1. Dérivée de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$.

Théorème :

Soit u une fonction dérivable sur I alors la fonction $e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I \ \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$$

2. Exemples types.

Définition :

Soit un réel k **strictement positif**, on définit les fonctions f_k et g_k sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = e^{kx} \quad \text{et} \quad g_k(x) = e^{-kx}$$

Les fonctions f_k correspondent à une **croissance exponentielle**.
Les fonctions g_k correspondent à une **décroissance exponentielle ou atténuation**.

Démonstration :

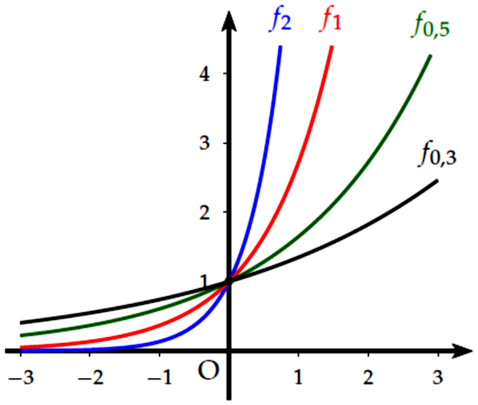
Les fonctions f_k et $g_k$sont dérivables sur $\mathbb{R}$

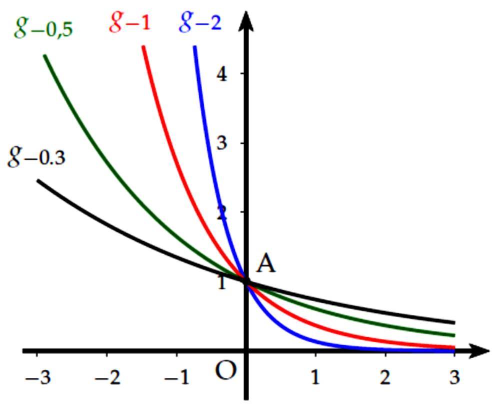
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_k'(x) = ke^{kx} > 0 \quad \text{et} \quad g_k'(x) = -ke^{-kx} < 0$$

On obtient le tableau de variation et les courbes représentatives ci-dessous :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_k'(t)$		$+$	
$f_k(t)$	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$g_k'(t)$		$-$	
$g_k(t)$	$+\infty$ ↘	1 ↘	0





Exemples : Phénomènes fonction du temps

- Croissance exponentielle : cette évolution théorique a des limites car un phénomène ne peut croire indéfiniment. Dans les faits cette croissance n'a lieu qu'au début du développement. On peut citer le développement de micro-organismes (cellules, bactérie) ou la réaction en chaîne dans une bombe atomique.

- Atténuation : de nombreux phénomènes physiques suivent cette décroissance. Nombre de noyaux dans une désintégration radioactive : $N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$
Intensité de décharge d'un condensateur d'un circuit RC : $i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$

Vidéo : étudier une fonction exponentielle dans une situation concrète

3. Modèle discret.

Un modèle discret est un échantillonnage d'une fonction continue dont on ne considère que des valeurs en certains instants : $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, … Les modèles continues sont souvent préférés car l'arsenal des outils sur les fonctions rendent plus facile leur manipulation.

Théorème :

Un phénomène discret se modélise par une croissance ou une décroissance exponentielle s'il peut être modélisé par une suite géométrique. Cette suite se visualise par un nuage de points se situant sur la courbe d'une fonction exponentielle :

$$t \mapsto ae^{bt} \quad \text{avec } \; a > 0 \; \text{ et } \; b \in \mathbb{R}$$

Le coefficient a correspond au terme initial de la suite.
Pour déterminer le coefficient b en fonction de la raison q de la suite, il faut résoudre l'équation :

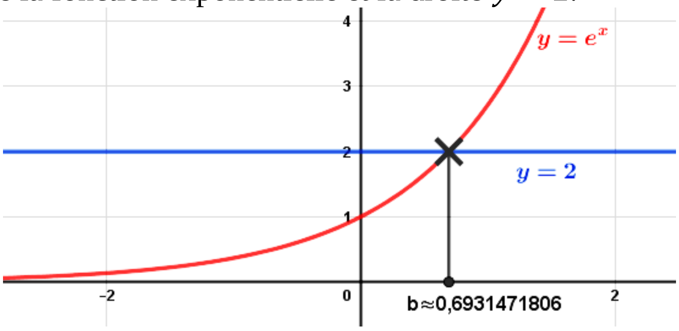
$$q = e^b$$

La suite (e^{nb}) est une suite géométrique de raison $q = e^b$ et de premier terme 1.

Exemple :

On revient à notre population initiale de 100 000 de bactéries qui double toutes les vingt minutes.
On note u_n le nombre de bactéries (en centaines de milliers) au bout de n vingtaines de minutes.

- $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_{n+1} = 2u_n$ et $u_0 = 1$.
  Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 2 et de terme initial $u_0 = 1$.
  D'où $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = u_0 \times 2^n = 1 \times 2^n = 2^n$.
- On cherche à déterminer un modèle continu pour la population en fonction du temps t exprimé en années. La fonction associée à une suite géométrique est une fonction exponentielle de la forme : $f(t) = ae^{bt}$.
  Comme $u_0 = 1$, on en déduit le coefficient $f(0) = ae^{b \times 0} = ae^0 = a \times 1 = a = 1$.
  Comme la raison q est supérieur à 1, la suite (u_n) est croissante et le coefficient b est positif.
  Pour déterminer b, il faut résoudre l'équation $e^b = q \Leftrightarrow e^b = 2$ car $f(1) = e^b = u_1 = 2$.
  On peut connaître une valeur approchée de b à l'aide d'une résolution graphique sur une calculatrice. On trace la fonction exponentielle et la droite $y = 2$.



On cherche l'abscisse de l'intersection de la courbe et de la droite.
À l'aide de l'outil intersection sur la calculatrice, on trouve : $b \approx 0,6931471806$.
On étudiera dans l'exercice n°15 un algorithme permettant d'obtenir cette valeur.

La fonction f en prenant pour b une approximation à 10−3 est alors :

$$f(t) = 1e^{0,6931471806t} = e^{0,6931471806t}$$

On trouve alors pour 110 minutes : $f(110 \div 20) = e^{0,6931471806 \times 110 \div 20} = 45\,2548340$.

Remarque : la valeur de b est $\ln(2)$ *où* $\ln$ *(pour logarithme népérien) est une fonction qui sera étudiée en Terminale et dont la touche figure sur votre calculatrice.*

Vidéo : [déterminer une suite géométrique comprenant une exponentielle]

Exercice n°5 :

Calculer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes :

1) $f_1(x) = e^x + x^2 + e^2$
2) $f_2(x) = e^x + e^{-2x} + \pi$
3) $f_3(x) = (2x - 3)(1 - e^x)$
4) $f_4(x) = x^2 e^{2x}$
5) $f_5(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^x}$
6) $f_6(x) = \dfrac{3}{1 - 3e^{-3x}}$

Exercice n°6 :

Une entreprise pharmaceutique fabrique un soin antipelliculaire. Elle peut produire entre 200 et 2 000 litres de produit par semaine.
Le résultat, en dizaines de milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de litres est donné par la fonction R définie par :

$$R(x) = (5x - 30)e^{-0,25x} \qquad \text{pour tout réel } x \in [2\ ;\ 20].$$

1) Calculer le résultat réalisé par la fabrication et la vente de 7 centaines de litres de produit. On l'arrondira à l'euro près.
2) Vérifier que pour la fabrication et la vente de 400 litres de produit, l'entreprise réalise un résultat négatif (appelé déficit).
3) Résoudre l'inéquation $R(x) \geq 0$, d'inconnue x. Interpréter dans le contexte de l'exercice.
4) On note R' la dérivée de la fonction R.
   Un logiciel de calcul formel donne :
   $$R'(x) = (-1,25x + 12,5)e^{-0,25x}$$
   En déduire la quantité de produit que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser le résultat maximal.

Exercice n°7 :

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + x}$$

On note C_f la représentation graphique de dans un repère du plan.

1) Déterminer les coordonnées du point A, point d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des ordonnées.
2) La courbe C_f coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Justifier la réponse.
3) On note f' la dérivée de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   Montrer que, pour tout réel de $[0\ ;\ +\infty[$:
   $$f'(x) = \frac{xe^x}{(1 + x)^2}$$
4) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
5) En déduire le sens de variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
6) On note T la tangente à C_f au point B d'abscisse 1,6.
   La tangente T passe-t-elle par l'origine du repère ? Justifier la réponse.

Exercice n°8 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x-1)e^x$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1) Montrer que pour tout réel x :
$$f'(x) = (2x+1)e^x$$
2) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées.
5) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

Exercice n°9 :

Donner la nature des suites ci-dessous et précise leur sens de variations.

1) (u_n) définie par $u_n = e^{5n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2) (u_n) définie par $u_n = e^{-n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3) (u_n) définie par $u_n = e^2 n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4) (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + e^{-2} \end{cases}$.

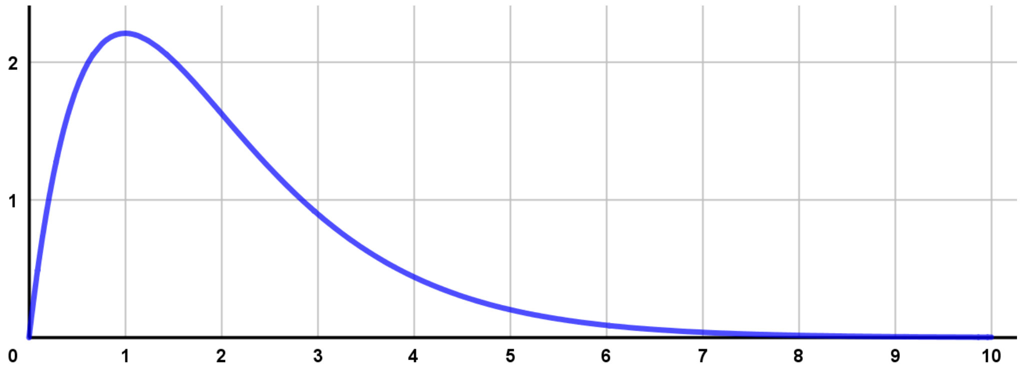
Exercice n°10 :

On procède, chez un sportif, à l'injection intramusculaire d'un produit. Celui-ci se diffuse progressivement dans le sang.

On admet que la concentration de ce produit dans le sang (exprimée en $mg/L = milligramme\ par\ litre$) peut être modélisée par la fonction f, définie en fonction du temps x exprimé en heure avec $x \in [0\ ;\ 10]$ par :

$$f(x) = \frac{6x}{e^x}$$

Sa courbe représentative C_f est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.

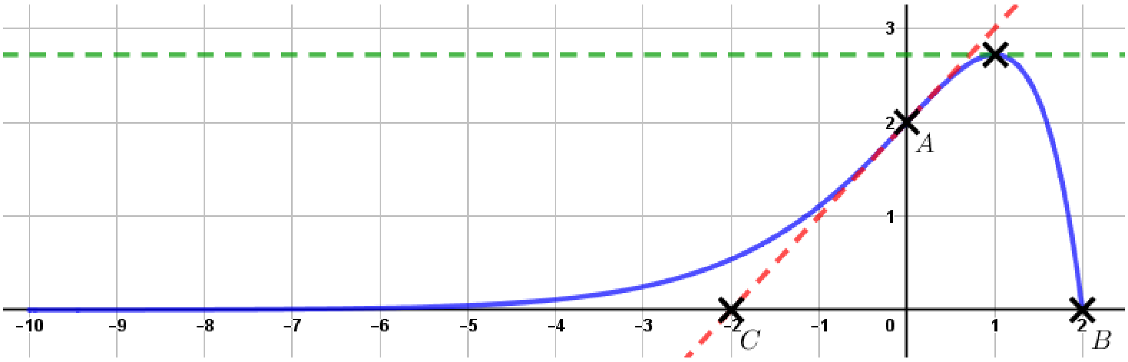


1) Montrer que pour tout $x \in [0\ ;\ 10]$, la fonction dérivée de f, notée f', a pour expression :
$$f'(x) = \frac{6-6x}{e^x}$$
2) Étudier le signe de f' sur $[0\ ;\ 10]$ puis en déduire le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ 10]$.
3) Quelle est la concentration maximale du médicament dans le sang ? (on donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-1} près). Au bout de combien de temps est-elle atteinte ?
4) Ce produit fait l'objet d'une réglementation par la fédération sportive : un sportif est en infraction si, au moment du contrôle, la concentration dans son sang du produit est supérieure à 2 mg/L. Le sportif peut-il être contrôlé à tout moment après son injection ?
   Expliquer votre raisonnement en vous basant sur l'étude de la fonction et/ou une lecture graphique sur la courbe C_f.

Exercice n°11 :

Dans le repère ci-dessous, on note C_f la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10\,;\,2]$. On a placé dans ce repère les points $A(0\,;2)$, $B(2\,;0)$ et $C(-2\,;0)$.
On dispose des renseignements suivants :

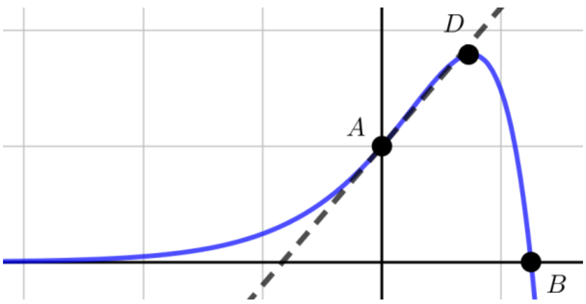
- Le point B appartient à la courbe C_f.
- La droite (AC) est tangente en A à la courbe C_f.
- La tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1 est une droite parallèle à l'axe des abscisses.



1) Déterminer la valeur de $f'(1)$.
2) Donner une équation de la tangente à la courbe C_f au point A.
3) On admet que cette fonction f est définie sur $[-10\,;\,2]$ par :
$$f(x) = (2-x)e^x$$
   a) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-10\,;\,2]$:
$$f'(x) = (-x+1)e^x$$
   b) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-10\,;\,2]$.
   c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f au point B.

Exercice n°12 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (5-2x)e^x$$
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f. Sur la figure ci-contre, on a tracé la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthogonal où les unités ont été effacées.



A est le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées et B le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
D est le point de $\mathcal{C}$ dont l'ordonnée est le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1) Calculer les coordonnées des points A et B.
2) Soit f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout réel x :
$$f'(x) = (3-2x)e^x$$
3) Étudier le sens de variation de la fonction f.
4) En déduire que le point D admet comme coordonnées $(1{,}5\,;\,2e^{1{,}5})$.
5) Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A, puis vérifier, à l'aide de l'équation obtenue, que le point D n'appartient pas à cette tangente.

Exercice n°13 : algorithme de dichotomie (mentionné dans le programme).

On s'intéresse à l'équation $e^x = 2$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On admet que cette équation a une unique solution dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.

On souhaite obtenir une valeur approchée aussi précise que souhaitée de la solution de cette équation. Pour cela, on considère cet algorithme de dichotomie ci-dessous :

```
a=0
b=1
while b-a>0.01 :
    c=(a+b)/2
    if exp(c)>2 :
        b=c
    else :
        a=c
print(c)
```

1) Compléter le tableau suivant permettant de suivre les premières étapes de l'algorithme :

Passage dans la boucle n°	a	b	c	e^c
1				
2				
3				
4				

2) Quel sera l'affichage à la sortie de cet algorithme ?

Exercice n°14 :

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[-5\,;\,5]$ par :

$$g(x) = e^x - x + 1$$

1) On admet que g est dérivable sur l'intervalle $[-5\,;\,5]$ et on note g' sa dérivée. Calculer $g'(x)$.
2) Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[-5\,;\,5]$.
3) Démontrer que g est strictement positive sur $[-5\,;\,5]$ c'est-à-dire que pour tout $x \in [-5\,;\,5]$:

$$g(x) > 0$$

4) Soit f la fonction définie sur $[-5\,;\,5]$ par :

$$f(x) = x + 1 + xe^{-x}$$

On appelle C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

On admet que f est dérivable sur l'intervalle $[-5\,;\,5]$ et on note f' sa fonction dérivée.

a) Démontrer que pour tout réel x de $[-5\,;\,5]$:

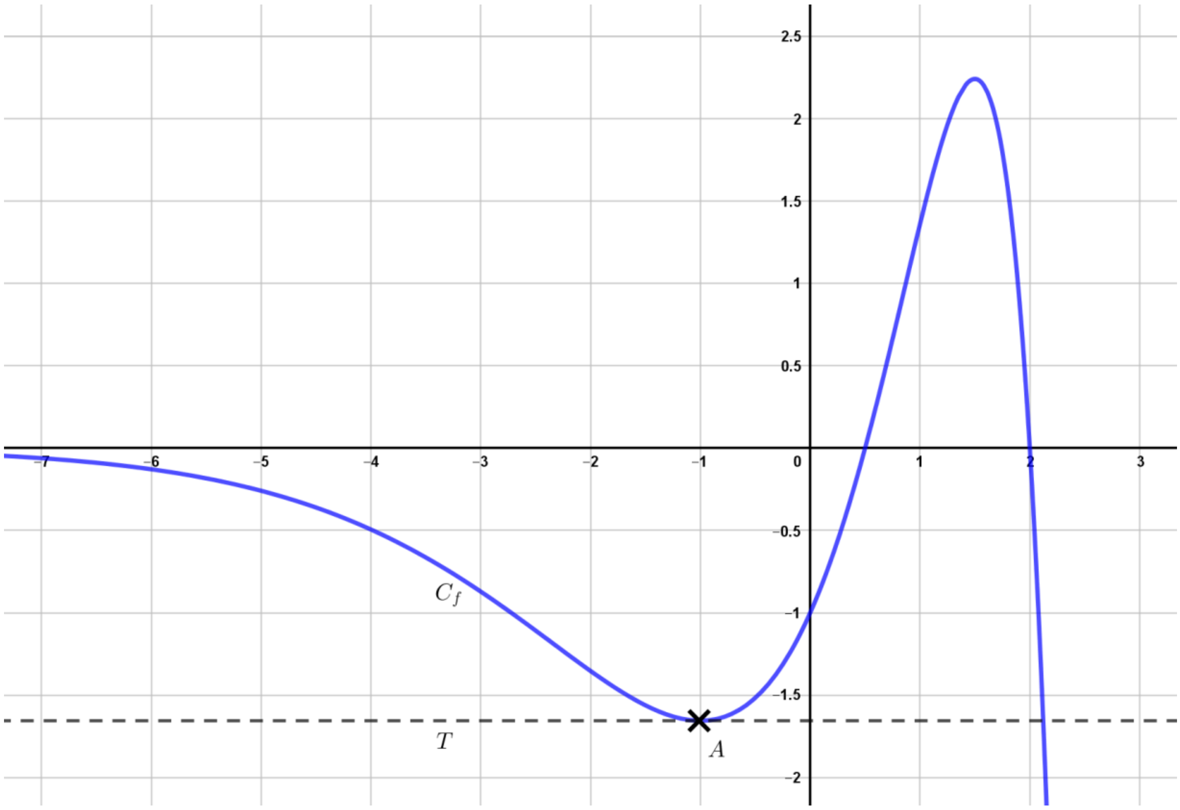
$$f'(x) = \frac{1}{e^x} \times g(x)$$

b) En déduire les variations de f sur l'intervalle $[-5\,;\,5]$.

c) Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

Exercice n°15 :

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-8\,;\,3]$.
La fonction dérivée de f est notée f'. Dans le repère orthonormé ci-dessous, la courbe C_f est la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-8\,;\,3]$.
Le point A est le point de C_f d'abscisse -1 et la droite T est la tangente à C_f en A.



1) Par lecture graphique, donner la valeur de $f'(-1)$.
2) Résoudre, graphiquement, l'inéquation $f'(x) \leq 0$.
3) On admet que la fonction f est définie sur $[-8\,;\,3]$ par :
$$f(x) = (-x^2 + 2{,}5x - 1)e^x$$
   a) Vérifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[-8\,;\,3]$:
$$f'(x) = (-x^2 + 0{,}5x + 1{,}5)e^x$$
   b) Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[-8\,;\,3]$.
   c) En déduire les variations de f sur l'intervalle $[-8\,;\,3]$.

Exercice n°16 : Bac *ES* Pondichéry 2016

L'entreprise BBE ($Bio\ Bois\ Énergie$) fabrique et vend des granulés de bois pour alimenter des chaudières et des poêles chez des particuliers ou dans des collectivités.
L'entreprise produit entre 1 et 15 tonnes de granulés par jour.

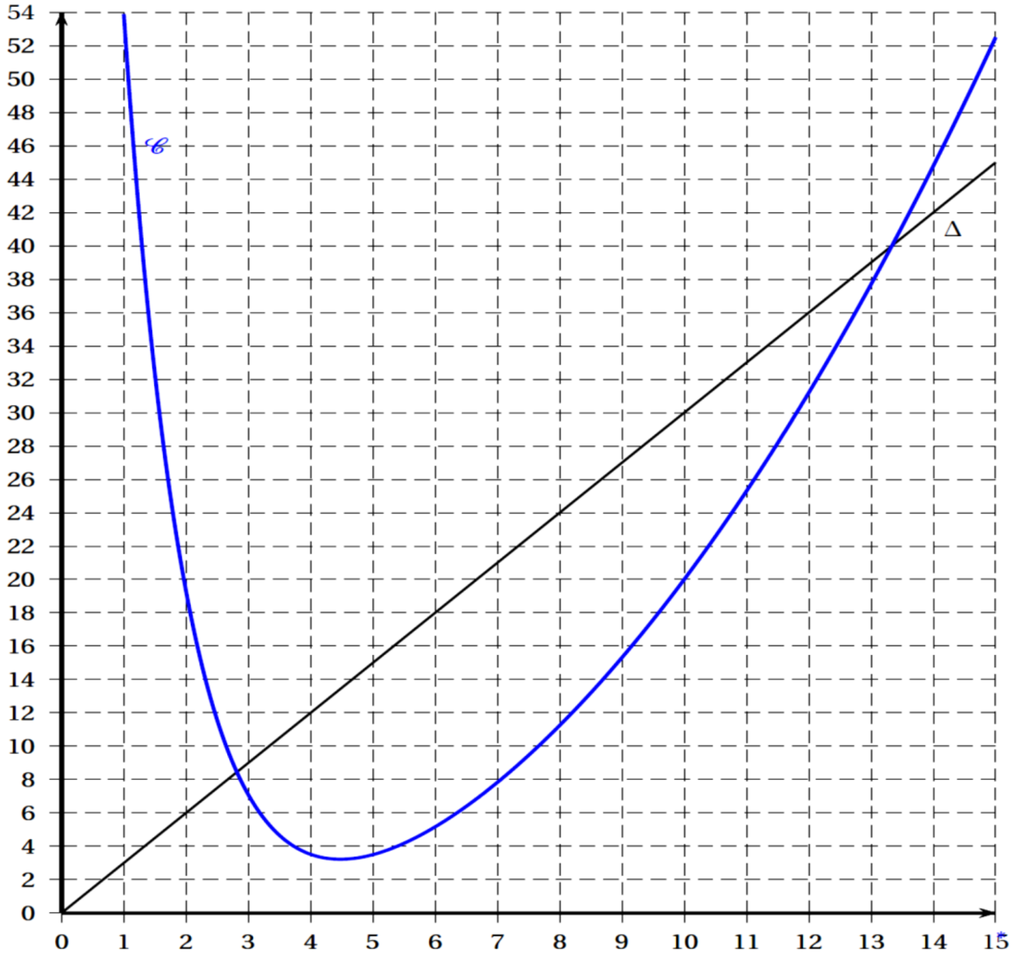
- Les coûts de fabrication quotidiens sont modélisés par la fonction C définie sur $[1\,;15]$ par :
$$C(x) = 0{,}3x^2 - x + e^{-x+5}$$
où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $C(x)$ le coût de fabrication quotidien correspondant en centaines d'euros.
- Dans l'entreprise *BBE* le prix de vente d'une tonne de granulés de bois est de 300 euros. La recette quotidienne de l'entreprise est donc donnée par la fonction R définie sur l'intervalle sur l'intervalle $[1\,;15]$ par : $R(x) = 3x$ où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $R(x)$ la recette quotidienne correspondante en centaines d'euros.
- On définit par $D(x)$ le résultat net quotidien de l'entreprise en centaines d'euros, c'est-à-dire la différence entre la recette $R(x)$ et le coût $C(x)$, où x désigne la quantité de granulés en tonnes.

Partie A : Étude graphique

Sur le graphique ci-dessous on donne $\mathcal{C}$ et Δ les représentations graphiques respectives des fonctions C et R dans un repère d'origine O.

Dans cette Partie A, répondre aux questions suivantes à l'aide du graphique, et avec la précision permise par celui-ci. Aucune justification n'est demandée.

1) Déterminer la quantité de granulés en tonnes pour laquelle le coût quotidien est minimal.
2) Déterminer les valeurs $C(6)$ et $R(6)$ puis en déduire une estimation du résultat net quotidien en euros dégagé par l'entreprise pour 6 tonnes de granulés fabriqués et vendus.
3) Déterminer les quantités possibles de granulés en tonnes que l'entreprise doit produire et vendre quotidiennement pour dégager un résultat net positif, c'est-à-dire un bénéfice.



Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur $[1\,;15]$ par :

$$g(x) = -0{,}6x + 4 + e^{-x+5}$$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[1\,;15]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1) Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;15]$.
2) En déduire que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[1\,;15]$.
3) Dresser le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;15]$, en précisant les valeurs $g(1)$ et $g(15)$ arrondies à l'unité.
4) Le tableau de variation permet d'affirmer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;15]$. Donner une valeur approchée de α à 0,1 près.
5) Déduire des questions précédentes le tableau de signe de $g(x)$ sur $[1\,;15]$.

Partie C : Application économique

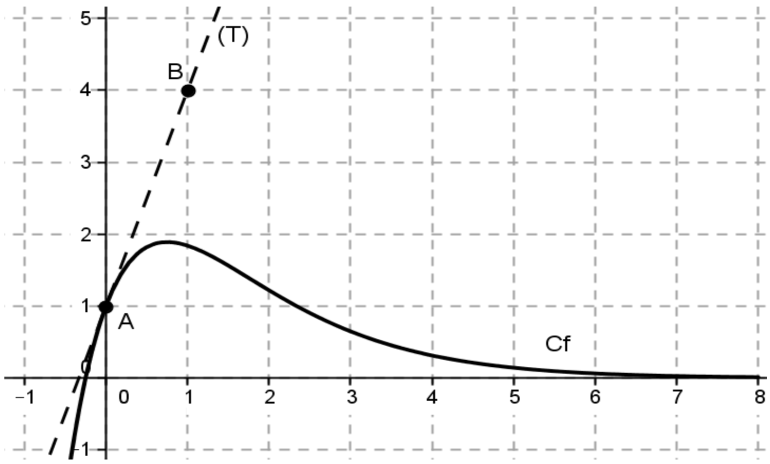
1) Démontrer que pour tout $x \in [1\,;15]$ on a :
$$D(x) = -0{,}3x^2 + 4x - e^{-x+5}$$
2) On admet que la fonction D est dérivable sur l'intervalle $[1\,;\,15]$ et on note D' sa fonction dérivée. Démontrer que pour tout réel $x \in [1\,;15]$, on a $D'(x) = g(x)$ où g est la fonction étudiée dans la **Partie B**.
3) En déduire les variations de la fonction D sur l'intervalle $[1\,;15]$.
4) Pour quelle quantité de granulés le bénéfice de l'entreprise sera-t-il maximal ?
   On donnera une valeur approchée du résultat à $0{,}1$ tonne près.
5) Calculer alors le bénéfice maximal à l'euro près.

Exercice n°17 :

Soit f la fonction définie sur $[-5\,;8]$ par : $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ où a et b sont deux réels.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' sa dérivée seconde.

Partie A :

On donne ci-dessous, dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$), la courbe représentative C_f de la fonction f et la droite (T) tangente à C_f au point $A(0\,;1)$ et passant par $B(1\,;4)$.



1) Montrer que pour tout réel $x \in [-5\,;8]$, $f'(x) = (a-b-ax)e^{-x}$.
2) Justifier que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$.
3) En déduire l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.
4) Déterminer a et b.

Partie B :

On admettra que $a = 4$ et $b = 1$ et donc que $\forall x \in [-5\,;8]$:
$$f(x) = (4x+1)e^{-x}$$
1) Etudier les variations de f pour $x \in [-5\,;8]$.
2) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3) Montrer que la dérivée seconde, f'', de f sur $[-5\,;8]$ est :
$$f''(x) = (4x-7)e^{-x}$$
4) Etudier le signe de f'' sur $[-5\,;8]$.
5) Une entreprise produit x centaines d'objets chaque semaine.
   Le coût de production, exprimé en milliers d'euros, est défini sur $[0\,;5]$ par la fonction f.
   Le coût marginal C_m est assimilé à la dérivée du coût total donc :
$$\forall x \in [0\,;5]\ C_m(x) = f'(x)$$
   Quel est le coût de production marginal minimal hebdomadaire ? On arrondira à l'euro près.

Exercice n°18 : énoncés et corrigés dans les vidéos.

1) **Vidéo :** Appliquer les formules sur la fonction exponentielle de base e
2) **Vidéo :** Résoudre une équation avec exponentielle
3) **Vidéo :** Résoudre une équation avec exponentielles (Expert)
4) **Vidéo :** Résoudre une inéquation avec exponentielle
5) **Vidéo :** Dériver une fonction avec exponentielle
6) **Vidéo :** Etudier la position relative : exponentielle et droite y=x

Exercice n°19 : QCM noté sur le chapitre à faire sur Pronote.

1) L'inéquation $e^{-2x} > 0$ d'inconnue x a pour ensemble de solutions :
   a) $\mathbb{R}$ b) $]0\,;\,+\infty[$
   c) $]-\infty\,;0[$ d) $\emptyset$

2) Pour tout réel x, $(e^x - 1)^2$ est égal à :
   a) $e^{2x} - 1$ b) $e^{2x} + 1$
   c) $e^{2x} - 2e^x + 1$ d) $e^{x^2} - 1$

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{5x-1}$. Pour tout réel x, $f'(x)$ est égal à :
   a) e^{5x-1} b) $5e^{5x}$
   c) $5e^{5x-1}$ d) $5xe^{5x-1}$

4) L'inéquation $-3e^{x+2} > -3e^4$, d'inconnue x, a pour ensemble de solutions :
   a) $]-2\,;\,+\infty[$ b) $]2\,;\,+\infty[$
   c) $]-\infty\,;2[$ d) $]-\infty\,;-2[$

5) Pour tout réel x, l'expression ci-dessous est égale à :
$$\frac{e^{5x}}{e^{2x-2}}$$
   a) e^{3x+2} b) e^{3x-2}
   c) $e^{2,5x-2,5}$ d) e^{7x-2}

6) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^x$. Alors, la fonction f' dérivée de f est donnée sur $\mathbb{R}$ par :
   a) $f'(x) = e^x$ b) $f'(x) = (x+3)e^x$
   c) $f'(x) = (-x-1)e^x$ d) xe^x

7) Pour tout réel x, l'expression ci-dessous est égale à :

$$\frac{(e^x)^2}{e^{-x}}$$

a) e^{x^2+x} b) e^{3x}

c) e^2 d) e^{-2}

8) L'expression ci-dessous est égale à :

$$\frac{e^3 \times e^{-5}}{e^2}$$

a) -1 b) $e^{-\frac{15}{2}}$

c) $\frac{1}{e^4}$ d) $\frac{3e^{-5}}{2}$

G) Approfondissement : ces notions ne seront pas traitées en classe.

1. Unicité de la fonction exponentielle.

Théorème :

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f \text{ et } f(0) = 1.$$

On nomme cette fonction exponentielle et on la note : exp.

Démonstration :

L'existence de cette fonction est admise nous allons donc uniquement démontrer l'unicité.

1) La fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = f(x)f(-x)$$

Montrons que la fonction φ est constante. Pour cela dérivons φ.

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \varphi'(x) = f'(x)f(-x) - f'(-x)f(x) = f(x)f(-x) - f(-x)f(x) = 0.$

Car $\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) = f(x)$ et donc $f'(-x) = f(-x)$.

Comme $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \varphi'(x) = 0$, on peut affirmer que φ est constante.

Or $\varphi(0) = f(0)f(-0) = 1 \times 1 = 1$.

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \varphi(x) = f(x)f(-x) = 1$, la fonction f ne s'annule donc pas sur $\mathbb{R}$.

2) Unicité.
On suppose que deux fonctions f et g vérifient les conditions du théorème.
On a donc :

$$f' = f \ ;\ g' = g \text{ et } f(0) = g(0) = 1.$$

La fonction g ne s'annule donc pas, on définit alors sur $\mathbb{R}$ la fonction h par :

$$h = \frac{f}{g}$$

On dérive h :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{\left(g(x)\right)^2} = \frac{f(x)g(x) - g(x)f(x)}{\left(g(x)\right)^2} = 0$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}\ \ h'(x) = 0$, on peut affirmer que h est constante.

Or : $\quad h(0) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$

On a donc $\quad \forall x \in \mathbb{R}\ \ h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

D'où, $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = g(x)$.

L'unicité est ainsi prouvée, nous noterons dans la suite cette fonction exp.

2. Relation fonctionnelle.

Théorème :

Soit a et b deux réels, on a alors :

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b).$$

Remarque : cette relation s'appelle la relation fonctionnelle car on pourrait définir l'exponentielle à partir de cette propriété pour retrouver que l'exponentielle est égale à sa dérivée.

Démonstration :

On définit alors sur $\mathbb{R}$ la fonction h par :

$$h(x) = \frac{\exp(x+a)}{\exp(a)}$$

Montrons alors que la fonction h n'est autre que la fonction exponentielle, il suffit donc de montrer que :

$$h' = h \quad \text{et} \quad h(0) = 1.$$

- $h(0) = \dfrac{\exp(0+a)}{\exp(a)} = \dfrac{\exp(a)}{\exp(a)} = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R} \ \ h'(x) = \dfrac{[\exp(x+a)]'}{\exp(a)} = \dfrac{1 \times \exp(x+a)}{\exp(a)} = \dfrac{\exp(x+a)}{\exp(a)} = h(x)$

La fonction h est donc la fonction exponentielle.

On en déduit alors que : $h(x) = \dfrac{\exp(x+a)}{\exp(a)}$

Donc que $\exp(x+a) = \exp(x) \times \exp(a)$