Graphes étiquetés et chemin le plus court

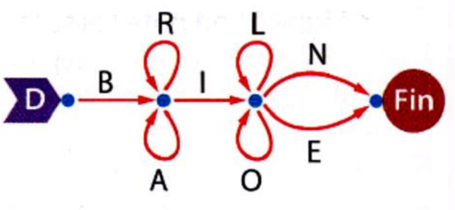
A) Graphe étiqueté.

Définition :

Un graphe est dit étiqueté lorsque ses arêtes sont affectées d'étiquettes.
Elles peuvent être des nombres, des symboles, des lettres, etc.
La plupart du temps, un graphe étiqueté est orienté.
Un graphe étiqueté contient un sommet appelé début, ou départ du graphe étiqueté, et un sommet final appelé fin.
Pour connaître le nombre de « mots » de longueur p reconnus par un graphe étiqueté, on calcule M^p, où M est la matrice d'adjacence de ce graphe.

Exemple :

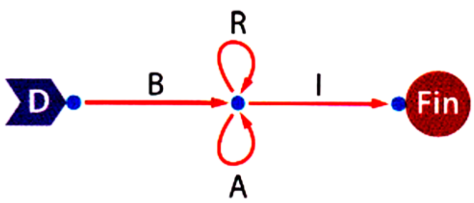
Le graphe étiqueté ci-dessous reconnaît des « mots » comme :
$BRIN$, $BAILLE$, $BRILLE$, $BARIOLE$, $BILLE$, ...

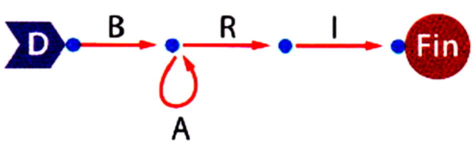


BIN ou BIE sont les chaînes de longueur minimale pour ce graphe.
Un mot qui ne commence pas par B n'est pas reconnu par ce graphe. En revanche, $BRRRRRRRRIN$ est reconnu.

Exercice n°1 :

On donne les deux graphes suivants :





Citer trois « mots » reconnus par chacun de ces deux graphes.

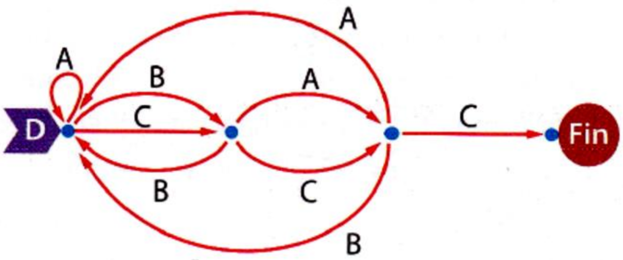
Exercice n°2 :

On désire programmer un jeu pour enfant qui reconnaît, entre autres, les mots :
BEC – BAC – $BABAE$ – $BEBEE$, saisis sur un clavier ayant les quatre lettres A, B, C et E.

1) Construire le graphe étiqueté qui reconnaît ces mots.
2) Le graphe que vous avez construit reconnaît-il les mots : $BABE$ – $BEBAC$?

Exercice n°3 :

On donne le graphe ci-dessous :

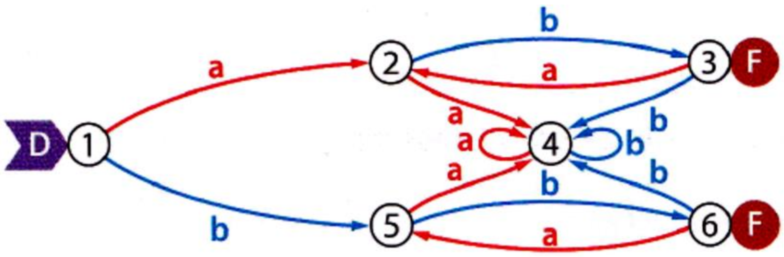


1) Quelle est la longueur L de chaîne minimale allant du début à la fin ?
   Ce nombre est le diamètre de ce graphe. Dénombrer les mots de longueur L.
2) Indiquer un « mot » de longueur 6 reconnus par ce graphe.
3) Les mots $BABAC$; $BCBACCC$ et $ABCBAC$ sont-ils reconnus par ce graphe ?
4) Existe-t-il des mots commençant et finissant par C non reconnus par ce graphe ?

Exercice n°4 :

Un codage en binaire peut se faire par un graphe.

1) On sait que le nombre 324 en base 10 correspond à :
$$3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$
   De même le nombre 1001 en binaire correspond à :
$$1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 9$$
   Donner la valeur en base 10 des nombres en binaire : 10011 et 01010.
2) On considère le graphe ci-dessous :



   On s'intéresse aux mots reconnus par ce graphe.
   a) Donner les mots de longueur minimale reconnus par ce graphe.
   b) A-t-on des mots de longueur 5 reconnus par ce graphe ?
   c) Dans le graphe ci-dessus, on traduit a par 0 et b par 1.
      Le mot « $abbaa$ » se traduit donc par « 01100 ».
      Donner la traduction des mots « $aaba$ » et « $ababab$ » en binaire.
3) On donne la matrice M de ce graphe ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Expliquer la colonne de « 0 ».
   b) Comment se traduit sur la matrice le sommet « absorbant » 4 ?
   c) CalculerM^4. Combien de mots de longueur 4 conduisent au sommet absorbant 4 ?

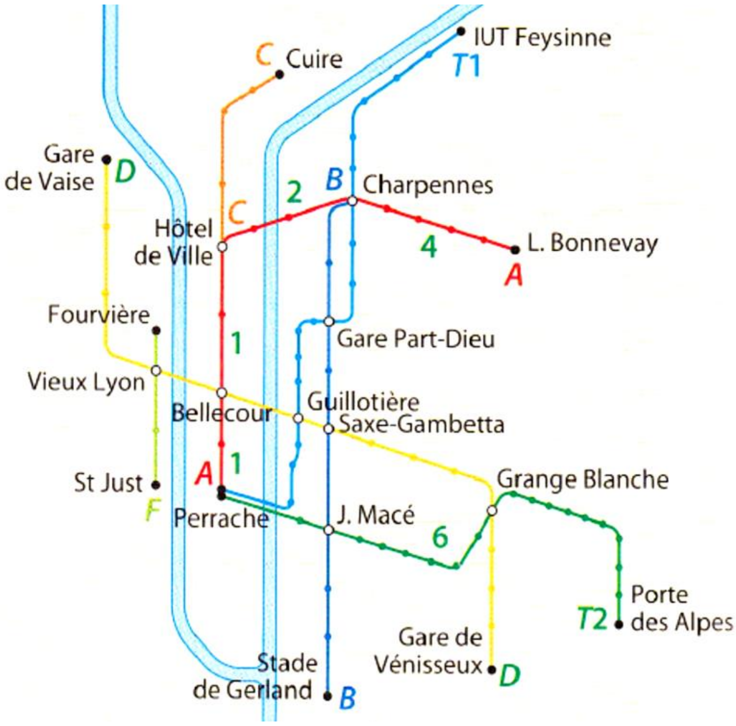
B) Graphe pondéré.

Définition :

Un graphe pondéré est un graphe étiqueté dont les étiquettes sont des nombres positifs.
De tels graphes traduisent des situations de déplacement sur un réseau, souvent à optimiser : coût, durée, distance, nombre de connexions annexes, etc.
A chaque arête est affecté un nombre, appelé le poids de l'arête.
Le poids d'une chaîne est alors la somme des poids des arêtes qui la composent.

Exemple :

Le graphe ci-dessous, présente le plan du métro de la ville de $Lyon$.
Les sommets sont les terminaux de lignes et les intersections entre deux lignes.
On pondère chaque tronçon par le nombre de stations intermédiaires.
Ainsi, le tronçon $J.Macé - Grange\ Blanche$ est pondéré par 6. La $ligne\ A$ est la chaîne :
$L.Bonnevay - Charpennes - Hôtel\ de\ Ville - Bellecour - Perrache$
Son poids est de 8.
Ainsi, sur la $ligne\ A$ de $Lyon$, formée de 4 tronçons, on trouve 8 stations intermédiaires.
On peut aussi chercher le temps de parcours d'un trajet en pondérant par la durée du trajet.



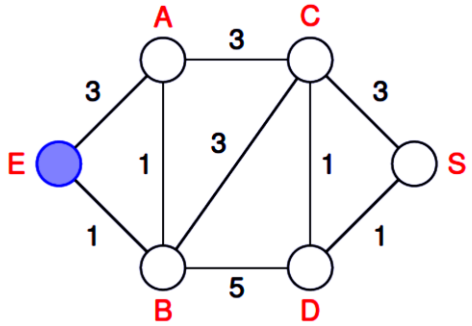
C) Graphe pondéré : Algorithme de Dijkstra.

Un graphe pondéré connexe étant donné, il existe au moins une chaîne reliant le début et la fin.
On recherche s'il existe une chaîne dont le poids est minimum entre le début et la fin.
Lorsque le graphe a de nombreux sommets, la détermination nécessite d'envisager toutes les chaînes ou d'utiliser un algorithme.
On propose d'utiliser l'algorithme de $Dijkstra$, présenté page suivante à l'aide de tableaux.

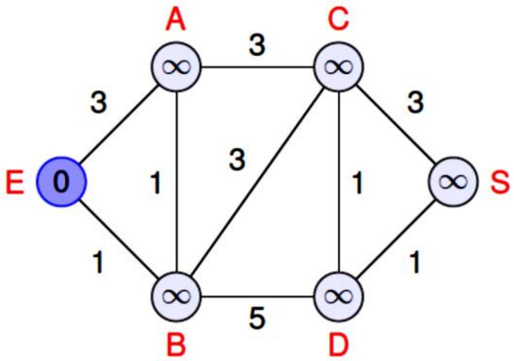
Exemple :

L'explication purement théorique de cet algorithme n'étant pas simple, nous allons le présenter en l'appliquant en résolvant un cas concret.

Exemple : Cherchons, à l'aide de l'algorithme de $Dijkstra$, le plus court chemin pour aller de E et en S dans le graphe donné ci-dessous :

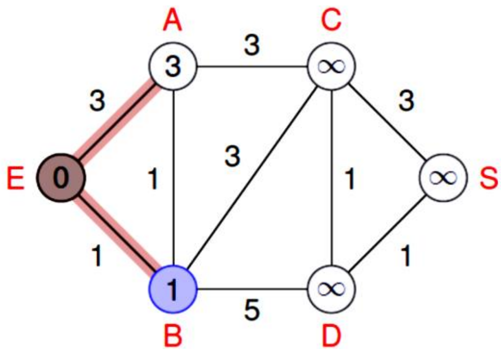


Etape n°1 : on attribue le nombre 0 au sommet de départ. On affecte le symbole ∞ à tous autres sommets et on « bloque » le sommet E car il a le plus petit nombre.



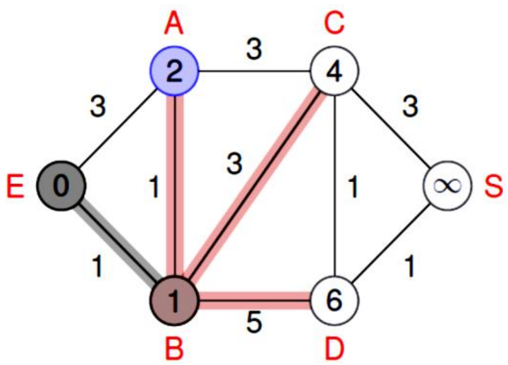
E	A	B	C	D	S
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞
•					
•					
•					
•					
•					

Etape n°2 : on attribue aux sommets adjacents à E le nombre inscrit sur l'étiquette de l'arrête les reliant. On recopie les autres et on « bloque » B car il a le plus petit nombre.



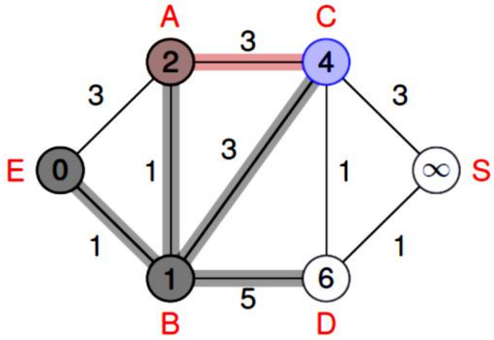
E	A	B	C	D	S
0	∞	∞	∞	∞	∞
•	3_E	$\boxed{1_E}$	∞	∞	∞
•		•			
•		•			
•		•			
•		•			

Etape n°3 : on attribue aux sommets adjacents à B (qui ne sont pas déjà « bloqués ») **la somme du nombre affecté à B et de du nombre inscrit sur l'étiquette de l'arrête les reliant**.
Si cette somme est inférieure à la précédente on l'inscrit sinon on recopie la précédente et on bloque A car il a le plus petit nombre.



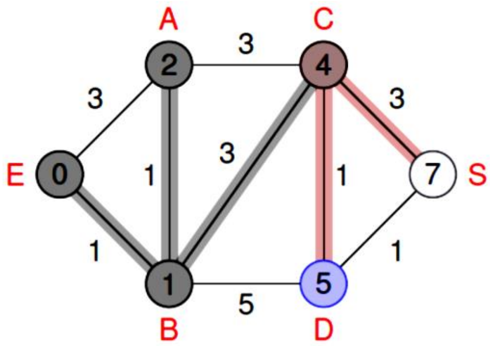
E	A	B	C	D	S
0	∞	∞	∞	∞	∞
•	3_E	1_E	∞	∞	∞
•	$\boxed{2_B}$	•	4_B	6_B	∞
•	•	•			
•	•	•			
•	•	•			

Etape n°4 : on attribue aux sommets adjacents à A (qui ne sont pas déjà « bloqués ») **la somme du nombre affecté à A et de du nombre inscrit sur l'étiquette de l'arrête les reliant.**
Si cette somme est inférieure à la précédente on l'inscrit sinon on recopie la précédente et on bloque C car il a le plus petit nombre.



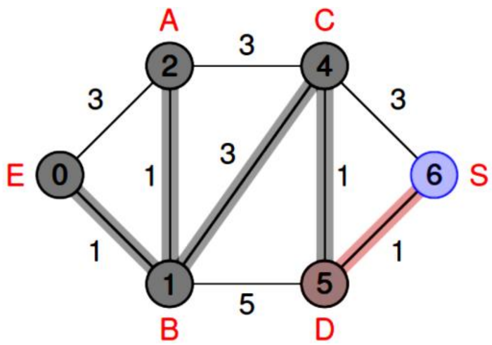
E	A	B	C	D	S
0	∞	∞	∞	∞	∞
•	3_E	1_E	∞	∞	∞
•	2_B	•	4_B	6_B	∞
•	•	•	$\boxed{4_B}$	6_B	∞
•	•	•	•		
•	•	•	•		

Etape n°5 : on attribue aux sommets adjacents à C (qui ne sont pas déjà « bloqués ») **la somme du nombre affecté à C et de du nombre inscrit sur l'étiquette de l'arrête les reliant.**
Si cette somme est inférieure à la précédente on l'inscrit sinon on recopie la précédente et on bloque D car il a le plus petit nombre.



E	A	B	C	D	S
0	∞	∞	∞	∞	∞
•	3_E	1_E	∞	∞	∞
•	2_B	•	4_B	6_B	∞
•	•	•	4_B	6_B	∞
•	•	•	•	$\boxed{5_C}$	7_C
•	•	•	•	•	

Etape n°6 : on attribue aux sommets adjacents à D (qui ne sont pas déjà « bloqués ») **la somme du nombre affecté à D et de du nombre inscrit sur l'étiquette de l'arrête les reliant.**
Si cette somme est inférieure à la précédente on l'inscrit sinon on recopie la précédente et on bloque S car il a le plus petit nombre.



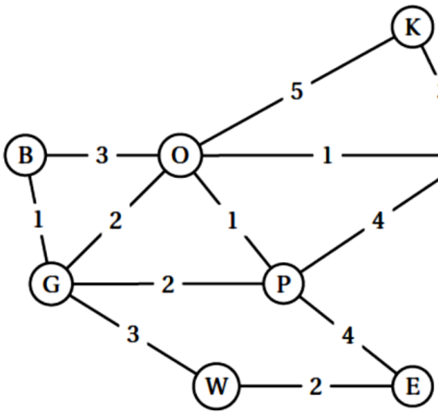
E	A	B	C	D	S
0	∞	∞	∞	∞	∞
•	3_E	1_E	∞	∞	∞
•	2_B	•	4_B	6_B	∞
•	•	•	4_B	6_B	∞
•	•	•	•	5_C	7_C
•	•	•	•	•	$\boxed{6_D}$

Etape n°6 : tous les sommets ont maintenant été « bloqués », on peut affirmer que la longueur minimale pour effectuer le trajet $E \rightarrow S$ est 6 et que ce trajet est $E \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow S$.

On l'obtient en « remontant » de sommet en sommet depuis S jusque E dans le tableau :
$\Rightarrow$ on est arrivé en S en provenant de D (6_D) ;
$\Rightarrow$ on est arrivé en en D en provenant de C (5_C) ;
$\Rightarrow$ on est arrivé en C en provenant de B (4_B) ;
$\Rightarrow$ on est arrivé en en B en provenant de E (1_E).

<u>Exemple</u> : Rédaction attendue pour l'exercice du Bac *ES* Doha 2015

On a schématisé ci-dessous une partie du plan du métro londonien par un graphe Γ dont les sommets sont les stations et les arêtes sont les lignes desservant ces stations. Chaque station de métro est désignée par son initiale comme indiqué dans la légende. Sur le graphe pondéré ci-dessus, on a indiqué la durée, exprimée en minutes, des trajets entre chaque station (la durée est indiquée sur chaque arête du graphe Γ).



Légende :
B : Bond Street
E : Embankment
G : Green Park
H : Holborn
K : King's Cross St Pancras
O : Oxford Circus
P : Piccadilly Circus
W : Westminster

À partir de la station $Westminster$, ce touriste doit rejoindre la station $King's\ Cross\ St\ Pancras$ le plus rapidement possible pour prendre un train. En utilisant l'algorithme de $Dijkstra$, déterminer le trajet permettant de relier la station $Westminster$ à la station $King's\ Cross\ St\ Pancras$ en une durée minimale. On précisera cette durée.

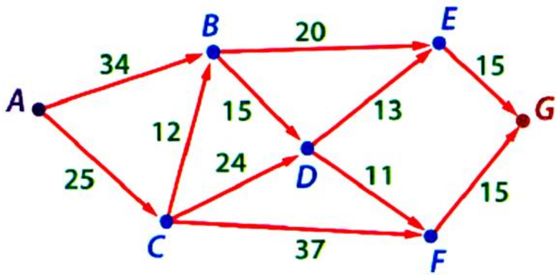
En utilisant l'algorithme de $Dijkstra$, on obtient :

W	B	E	G	H	O	P	K	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	W(0)
|	∞	2 (W)	3 (W)	∞	∞	∞	∞	E(2)
|	∞	|	3 (W)	∞	∞	6 (E)	∞	G(3)
|	4 (G)	|	|	∞	5 (G)	5 (G)	∞	B(4)
|	|	|	|	∞	5 (G)	5 (G)	∞	O(5)
|	|	|	|	6 (O)	|	5 (G)	10 (O)	P(5)
|	|	|	|	6 (O)	|	|	10 (O)	H(6)
|	|	|	|	|	|	|	9 (H)	K(9)

Le temps le plus court de $Westminster$ à la station $King's\ Cross\ St\ Pancras$ vaut : 9 minutes.
Le chemin est : $W \to G \to O \to H \to K$.

<u>Exercice n°5</u> :

Un transporteur doit se rendre de la ville A à la gare régionale G.
On considère le graphe orienté ci-dessous, donnant le nombre de km sur le réseau routier et le sens de parcours possible pour ce transporteur :



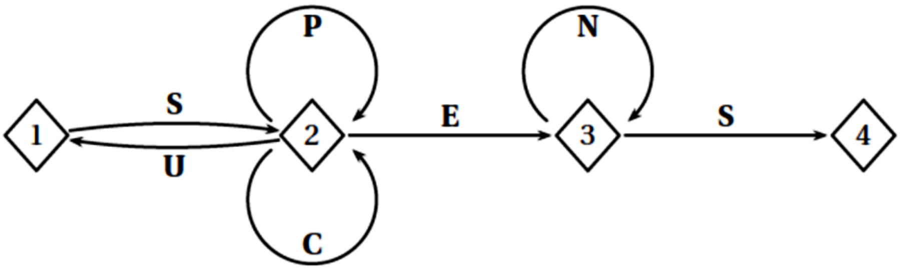
1) Calculer la distance, en km, pour les trajets : $A \to C \to F \to G$ et $A \to B \to E \to G$.
2) Quelles sont les chaînes de longueur maximale dans ce graphe ? Calculer leur poids.
3) Déterminer, à l'aide de l'algorithme, le trajet permettant à ce transporteur, partant de A, de rejoindre la gare régionale G par le plus court chemin.

Exercice n°6 : Bac *ES* Asie 2013

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

Partie A :

Pour accéder à sa messagerie, Antoine a choisi un code qui doit être reconnu par le graphe étiqueté suivant, de sommets 1, 2, 3 et 4 :



Une succession des lettres constitue un code possible si ces lettres se succèdent sur un chemin du graphe orienté ci-dessus, en partant du sommet 1 et en sortant au sommet 4. Les codes SES et $SPPCES$ sont ainsi des codes possibles, contrairement aux codes SUN et $SPEN$.

1) Parmi les trois codes suivants, écrire sur votre copie le (ou les) code(s) reconnu(s) par le graphe : $SUCCES$ $SCENES$ $SUSPENS$.
2) Recopier et compléter la matrice d'adjacence A associée au graphe. On prendra les sommets dans l'ordre $1-2-3-4$.

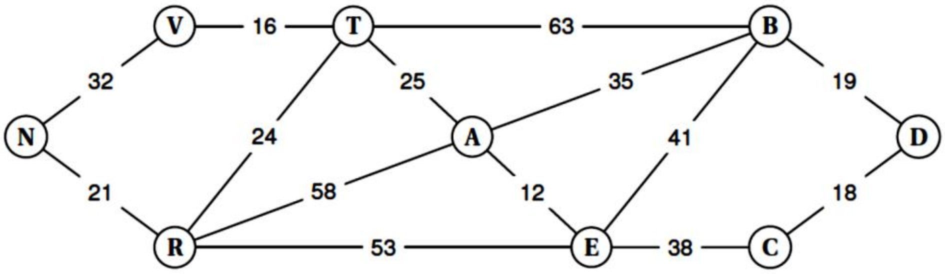
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

3) Avec une calculatrice on a calculé :

$$A^4=\begin{pmatrix} 5 & 12 & 8 & 3 \\ 12 & 29 & 20 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En déduire le nombre de codes de 4 lettres reconnus par le graphe.
Quels sont ces codes ?

Partie B :

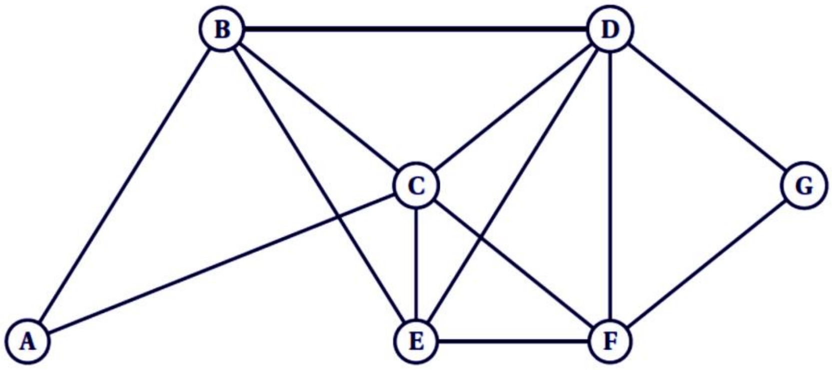


Antoine décide d'aller visiter neuf châteaux de la $Loire$.
Il a construit le graphe ci-dessus où les sommets représentent :
A : $Amboise$ B : $Blois$ C : $Cheverny$ D : $Chambord$ E : $Chenonceau$
T : $Tours$ V : $Villandry$ R : $Azay-le-Rideau$ et N : $Chinon$
Sur les arêtes sont indiquées les distances en km

1) Antoine peut-il partir de $Blois$ et y revenir, en parcourant une et une seule fois chacune des routes matérialisées par les arêtes de ce graphe ? On justifiera la réponse.
2) Déterminer le plus court chemin pour aller du château de $Chambord$ au château de $Chinon$. On donnera le parcours ainsi que le nombre total de kilomètres.

Exercice n°7 : Bac *ES* Doha 2013

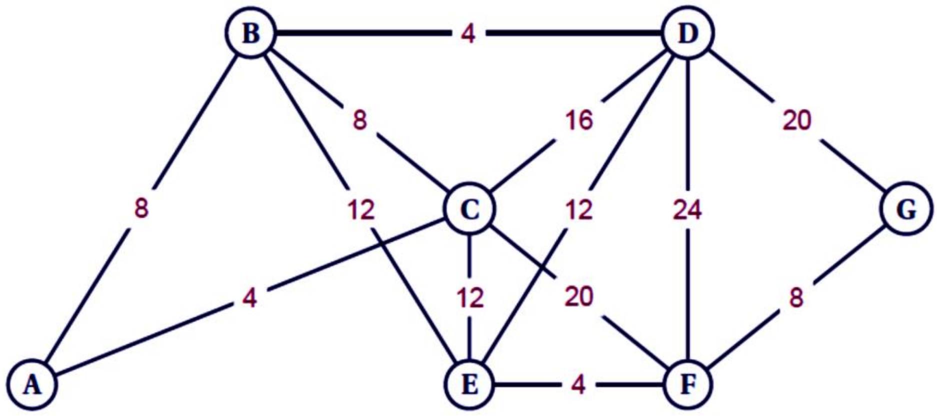
Dans le graphe ci-dessous, les sommets représentent différentes zones de résidence ou d'activités d'une municipalité. Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une voie d'accès principale entre deux lieux correspondants.



1) Donner, sans justifier, le degré de chacun des sommets (la réponse pourra être présentée sous forme de tableau où les sommets seront mis dans l'ordre alphabétique).
2) Donner la matrice M associée au graphe (les sommets seront mis dans l'ordre alphabétique).
3) Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A et F puis donner leur liste. On donne la matrice :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 5 & 5 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 12 & 13 & 12 & 8 & 5 \\ 8 & 12 & 12 & 15 & 13 & 13 & 5 \\ 5 & 13 & 15 & 12 & 13 & 12 & 8 \\ 5 & 12 & 13 & 13 & 10 & 12 & 5 \\ 5 & 8 & 13 & 12 & 12 & 8 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 8 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

4) Pour sa campagne électorale, un candidat souhaite parcourir toutes les voies d'accès principales de ce quartier sans emprunter plusieurs fois la même voie. Montrer qu'un tel parcours est possible.
5) Dans le graphe ci-dessous, les valeurs indiquent, en minutes, les durées moyennes des trajets entre les différents lieux via les transports en commun.

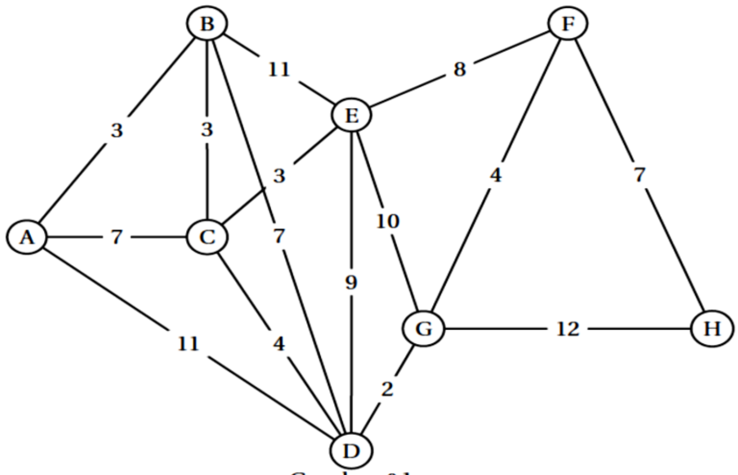


Ce même candidat se trouve à la $mairie$ (A) quand on lui rappelle qu'il a un rendez-vous avec le responsable de l'hôpital situé en $zone\ G$.

a) En utilisant l'algorithme de $Dijkstra$, déterminer le chemin de durée minimale que ce candidat devra emprunter pour arriver à son rendez-vous.
b) Combien de temps faut-il prévoir pour effectuer ce trajet ?

Exercice n°8 : Bac *ES* Pondichéry 2012

Les points de collecte d'un camion d'une société recyclant des « déchets papier », ainsi que les temps de trajet (en minutes) entre ces différents points, sont représentés par le $graphe\ n°1$.
Le $dépôt$ est représenté par le sommet A et les autres sommets représentent les différents points de collecte.

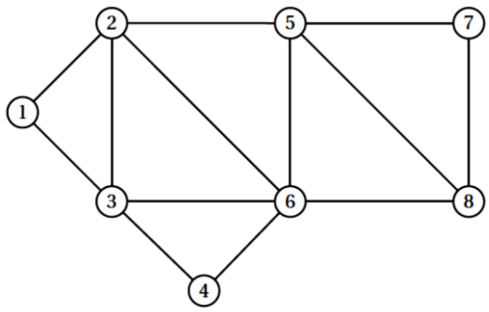


Graphe nº 1

1) Afin de rendre son plan plus lisible, le chauffeur du camion souhaite colorer les sommets du graphe représentant son réseau de manière à ce que deux sommets adjacents n'aient jamais la même couleur.
   a) Peut-il utiliser seulement trois couleurs ? Justifier.
   b) Déterminer le nombre minimal de couleur qu'il devra utiliser.
2) On appelle M la matrice associée au $graphe\ n°1$, M étant construite en utilisant les sommets dans l'ordre alphabétique. On donne ci-dessous la matrice M^4 :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 31 & 34 & 34 & 38 & 40 & 13 & 23 & 9 \\ 34 & 47 & 46 & 50 & 44 & 22 & 33 & 10 \\ 34 & 46 & 47 & 50 & 44 & 22 & 33 & 10 \\ 38 & 50 & 50 & 62 & 54 & 28 & 34 & 16 \\ 40 & 44 & 44 & 54 & 60 & 24 & 36 & 20 \\ 13 & 22 & 22 & 28 & 24 & 21 & 23 & 11 \\ 23 & 33 & 33 & 34 & 36 & 23 & 35 & 13 \\ 9 & 10 & 10 & 16 & 20 & 11 & 13 & 11 \end{pmatrix}$$

   Combien y a-t-il de trajets possibles permettant d'aller du $dépôt\ A$ au point de $collecte\ H$ en quatre étapes ?
3) Le conducteur doit se rendre du $dépôt\ A$ au point de $collecte\ H$.
   Il cherche le chemin qui minimise le temps de trajet. Déterminer ce chemin en expliquant le procédé utilisé, et préciser le temps minimum de parcours obtenu.
4) Le point de $collecte\ H$ est lui-même un lotissement résidentiel privé dont un plan est représenté à l'aide du graphe (non pondéré) ci-dessous. Les sommets sont les différents carrefours et les arêtes sont les voies de circulation.

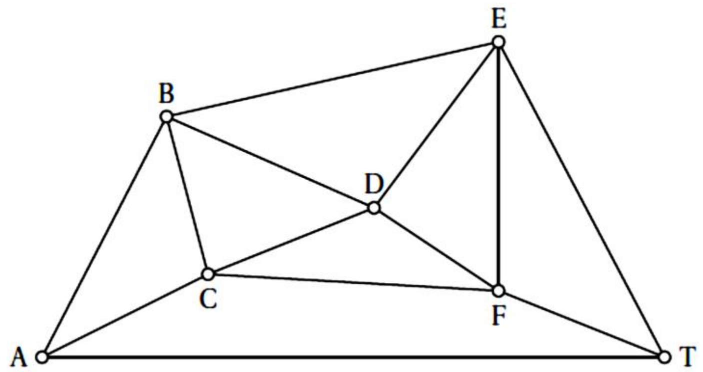


a) Quel est l'ordre de ce graphe ?
b) Justifier que ce graphe est connexe.
c) Ca graphe admet-il un cycle eulérien ? Justifier.
d) Le conducteur du camion doit passer le long de chaque voie afin de collecter les déchets individuels de chaque habitation.
Il entre dans le lotissement par le sommet 8.
Lui est-il possible de parcourir le lotissement en empruntant chaque voie une fois et une seule ? Justifier.

Exercice n°9 : Bac *ES* Polynésie 2014

Partie A :

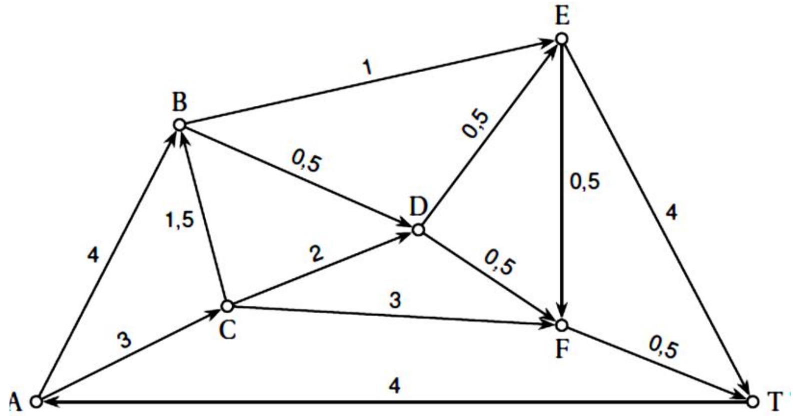
Le graphe ci-dessous représente, dans un aéroport donné, toutes les voies empruntées par les avions au roulage. Ces voies, sur lesquelles circulent les avions avant ou après atterrissage, sont appelées $taxiways$. Les arêtes du graphe représentent les voies de circulation (les $taxiways$) et les sommets du graphe sont les intersections.



1) Déterminer le nombre de voies de circulation au total.
2) Afin que l'aéroport soit déneigé le plus rapidement possible, est-il possible de planifier un parcours pour que les chasse-neige passent par toutes les voies sans emprunter plusieurs fois la même route ? Justifier la réponse et donner un tel parcours.

Partie B :

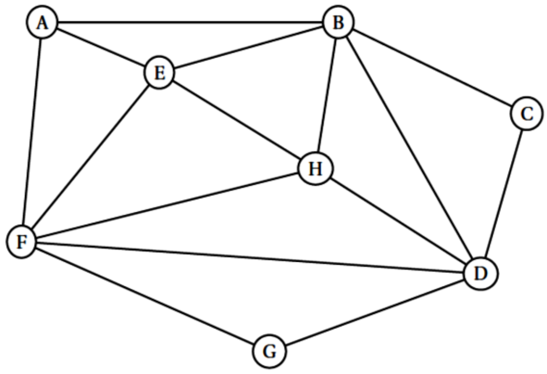
Dans le graphe ci-dessous, on a indiqué le sens de circulation pour les avions dans les différentes voies ainsi que le temps de parcours pour chacune en minute(s).



1) Écrire la matrice M associée à ce graphe (ranger les sommets dans l'ordre alphabétique).
2) Citer tous les chemins de longueur 3 reliant A à T.
3) L'avion qui a atterri est en bout de piste en A et doit se rendre le plus rapidement possible au terminal situé au point T.
Déterminer l'itinéraire le plus rapide et en donner la durée.

Exercice n°10 : Bac *ES* Asie 2015

La coopérative *LAFRUITIERE* collecte le lait de 7 exploitations de montagne. La situation géographique est représentée par le graphe ci-dessous, noté Γ La coopérative est située au sommet A, les autres sommets B, C, D, E, F, G et H représentent les différentes exploitations ; les arêtes représentent le réseau routier reliant ces exploitations.



Partie A :

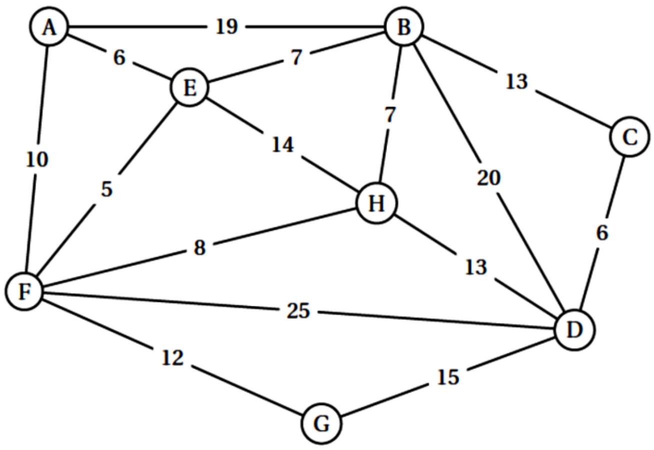
1) Le graphe Γ est-il complet ? Justifier.
2) Le graphe Γ est-il connexe ? Justifier.
3) Est-il possible d'organiser une tournée de toutes les exploitations en partant de A et en terminant en A et en passant au moins une fois par chaque client, tout en empruntant une fois et une seule chaque route ? Justifier la réponse.
4) On appelle M la matrice d'adjacence associée au graphe Γ (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique). On donne la matrice :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 & 7 & 8 & 11 & 3 & 6 \\ 11 & 8 & 7 & 13 & 12 & 8 & 6 & 13 \\ 3 & 7 & 2 & 7 & 5 & 6 & 2 & 4 \\ 7 & 13 & 7 & 8 & 8 & 13 & 7 & 12 \\ 8 & 12 & 5 & 8 & 8 & 12 & 5 & 11 \\ 11 & 8 & 6 & 13 & 12 & 8 & 7 & 13 \\ 3 & 6 & 2 & 7 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 6 & 13 & 4 & 12 & 11 & 13 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A à H. Indiquer ces chemins.

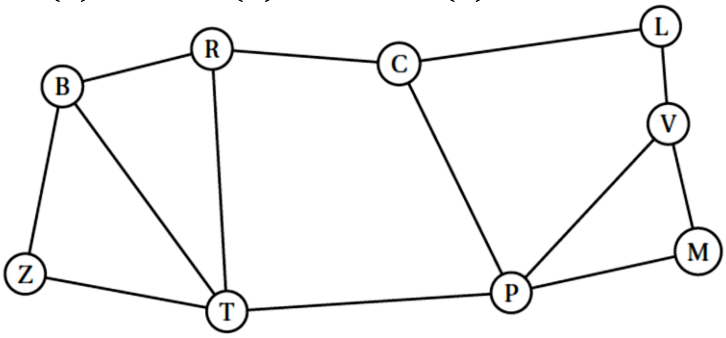
Partie B :

Les arêtes sont pondérées par les distances entre les exploitations, exprimées en kilomètres. La coopérative doit collecter du lait provenant de l'exploitation D; quel est le plus court parcours pour se rendre de A à D ? Justifier.



Exercice n°11 : Bac *ES* Liban 2013

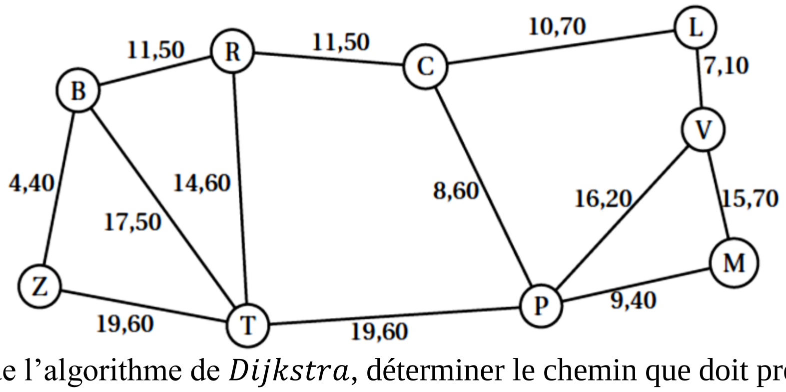
Le graphe ci-dessous représente les autoroutes entre les principales villes du Sud de la France : $Bordeaux\ (B)$, $Clermont - Ferrand\ (C)$, $Lyon\ (L)$, $Marseille\ (M)$, $Montpellier\ (P)$, $Brive\ (R)$, $Toulouse\ (T)$, $Valence\ (V)$ et $Biarritz\ (Z)$.



1) Pour cette question, on justifiera chaque réponse.
   a) Déterminer l'ordre du graphe.
   b) Déterminer si le graphe est connexe.
   c) Déterminer si le graphe est complet.
2) Un touriste atterrit à l'aéroport de Lyon et loue une voiture.
   Déterminer, en justifiant, s'il pourra visiter toutes les villes en empruntant une et une seule fois chaque autoroute.
3) Il décide finalement d'aller seulement de Lyon à Biarritz. On note N la matrice associée au graphe, les sommets étant rangés dans l'ordre alphabétique : B, C, L, M, P, R, T, V et Z.
   Voici les matrices N et N^3 :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & 3 & 6 & 6 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 & 8 & 6 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 5 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 5 & 2 & 1 & 8 & 7 & 1 \\ 6 & 6 & 0 & 2 & 1 & 2 & 8 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 1 & 8 & 8 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 7 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   En expliquant le calcul, déterminer le coefficient de la troisième ligne et dernière colonne de la matrice N^4. En donner une interprétation.
4) Sur les arêtes du graphe sont maintenant indiqués les prix des péages en euro.

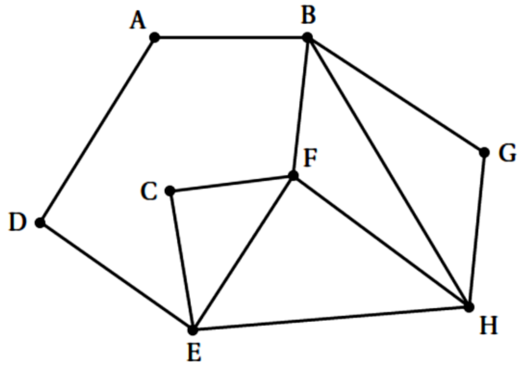


   a) A l'aide de l'algorithme de $Dijkstra$, déterminer le chemin que doit prendre le touriste pour minimiser le coût des péages de Lyon à Biarritz.
   b) Déterminer le coût, en euro, de ce trajet.
5) Pour rendre son plan plus lisible, le touriste souhaite colorer les sommets du graphe représentant son réseau de façon à ce que deux sommets adjacents de couleur différentes.
   a) Peut-il utiliser seulement deux couleurs ? Justifier.
   b) Déterminer le nombre minimal de couleur qu'il devra utiliser.

Exercice n°12 : Bac *ES* Métropole 2015

Partie A :

On considère le graphe Γ ci-dessous :



1) Déterminer en justifiant si ce graphe :
   a) est connexe ;
   b) admet une chaîne eulérienne.
2) On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique. On donne :

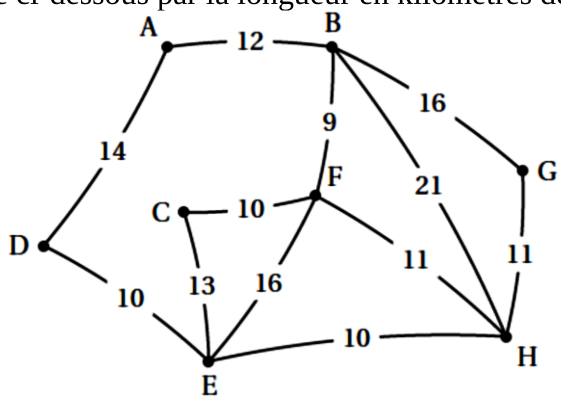
$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 5 & 9 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 6 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 5 & 4 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 9 & 6 & 3 & 8 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 8 & 3 & 2 & 9 & 9 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Donner, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à B.

Partie B :

Un club alpin souhaite proposer à ses membres des randonnées de plusieurs jours dans les Alpes. À cet effet, huit refuges notés A, B, C, D, E, F, G et H ont été sélectionnés. Le graphe Γ de la **Partie A** permet de visualiser les différents itinéraires possibles, les sommets représentant les refuges et les arêtes schématisant tous les sentiers de randonnée balisés les reliant.

1) D'après l'étude effectuée dans la **Partie A**, le club alpin est-il en mesure de proposer :
   a) un itinéraire au départ du refuge A qui passerait par tous les refuges en empruntant une fois et une seule fois chacun des sentiers ? Si oui, proposer un tel itinéraire ;
   b) des itinéraires de trois jours (un jour correspondant à une liaison entre deux refuges) reliant le refuge E au refuge B ? Si oui, combien peut-il en proposer ?
2) Le graphe Γ est complété ci-dessous par la longueur en kilomètres de chacun des sentiers.

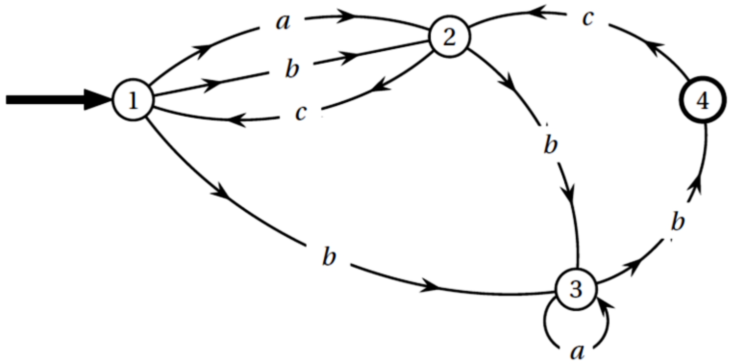


Le club alpin désire aussi proposer à ses membres l'itinéraire le plus court reliant A à H. Déterminer cet itinéraire et en préciser la longueur en kilomètres

Exercice n°13 : Bac *ES* Amérique du Nord 2019

Partie A :

Pour accéder à un local d'une petite entreprise, les employés doivent choisir un code reconnu par l'automate suivant :



Une succession de lettres constitue un code possible si ces lettres se succèdent sur un chemin du graphe orienté ci-dessus, en partant du sommet 1 et en sortant au sommet 4.
Par exemple :

- le mot $bcbab$ est un mot reconnu par cet automate, et correspond au chemin 121334;
- le mot $abac$ n'est pas reconnu par cet automate.

1) Parmi les mots suivants, quels sont ceux qui sont reconnus par cet automate ?

$$abab \quad ; \quad abc \quad ; \quad abbcbb$$

2) Recopier et compléter la matrice d'adjacence : $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ associée au graphe orienté dans laquelle les sommets sont rangés dans l'ordre croissant.

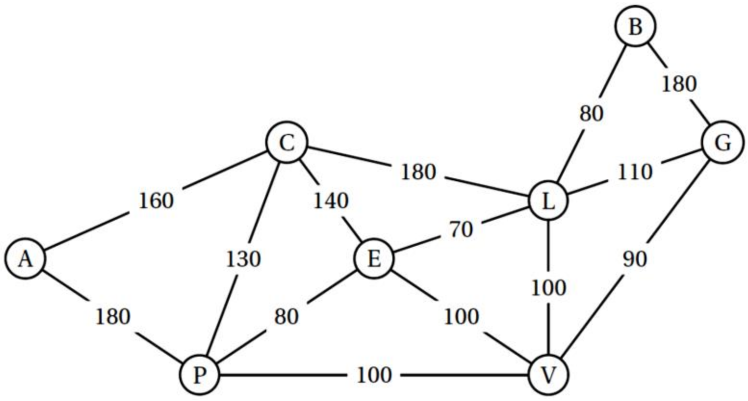
3) Un logiciel de calcul formel donne :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 10 & 5 \\ 1 & 6 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^5 = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 18 & 10 \\ 6 & 6 & 14 & 7 \\ 3 & 4 & 8 & 4 \\ 1 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Combien de mots de 4 lettres sont-ils reconnus par l'automate ? Justifier. Quels sont-ils ?

Partie B :

Dans le graphe ci-après, on a fait figurer les distances routières, exprimées en kilomètre, entre certaines grandes villes de la région Auvergne-Rhône-Alpes :
A : $Aurillac$; B : $Bourg-en-Bresse$; C : $Clermont-Ferrand$; E : $Saint-Etienne$
G : $Grenoble$; L : $Lyon$; P : $Le\ Puy-en-Velay$; V : $Valence$

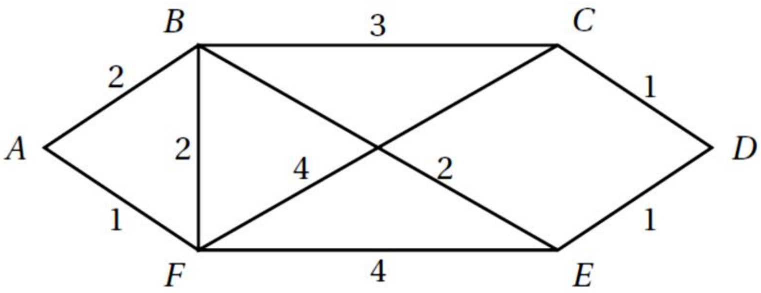


1) Un technicien doit vérifier l'état des routes du réseau représenté par le graphe ci-dessus.
   a) Peut-il parcourir l'ensemble du réseau en empruntant chaque route une et une seule fois ? Justifier la réponse.
   b) Si un tel parcours est possible, préciser par quelle(s) ville(s) de ce réseau routier le technicien doit commencer sa vérification.
2) Ayant terminé sa semaine de travail à Bourg-en-Bresse, le technicien souhaite retourner chez lui à Aurillac en faisant le moins de kilomètres possibles.
   a) Déterminer, en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le plus court chemin entre les villes de Bourg-en-Bresse et Aurillac en empruntant le réseau routier.
   b) La route entre Le Puy-en-Velay et Aurillac est fermée à la circulation.
      Quel chemin doit-il alors emprunter ?

Exercice n°14 : Bac *ES* Polynésie 2016

Pour chacune des deux affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

On donne le graphe pondéré G suivant :

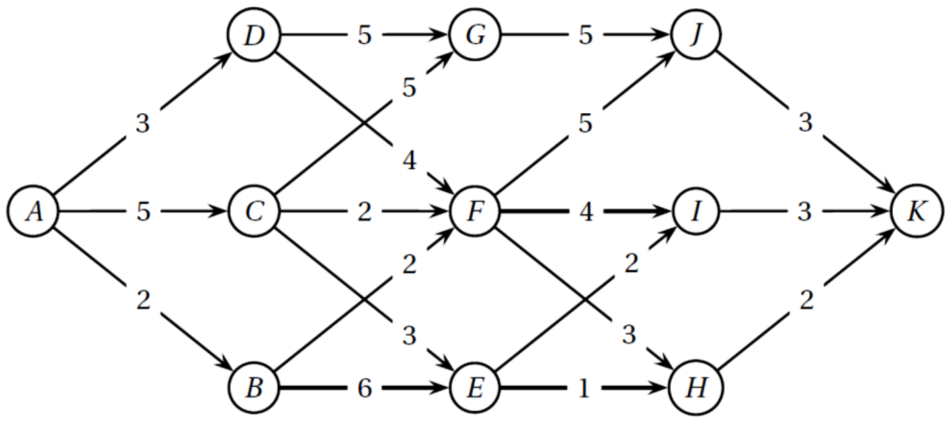


Affirmation A : Il existe une chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes de G.
Affirmation B : La plus courte chaîne entre les sommets A et D est une chaîne de poids 5.

Exercice n°15 : Bac *ES* Asie 2016

On oriente et on pondère le graphe G ci-dessus pour qu'il représente un réseau d'irrigation. Le sommet A correspond au départ d'eau, le sommet K au bassin d'infiltration et les autres sommets représentent les stations de régulation.

- Les arêtes représentent les canaux d'irrigation et les flèches, le sens du ruissellement.
- La pondération donne, en km, les distances entre les différentes stations du réseau.

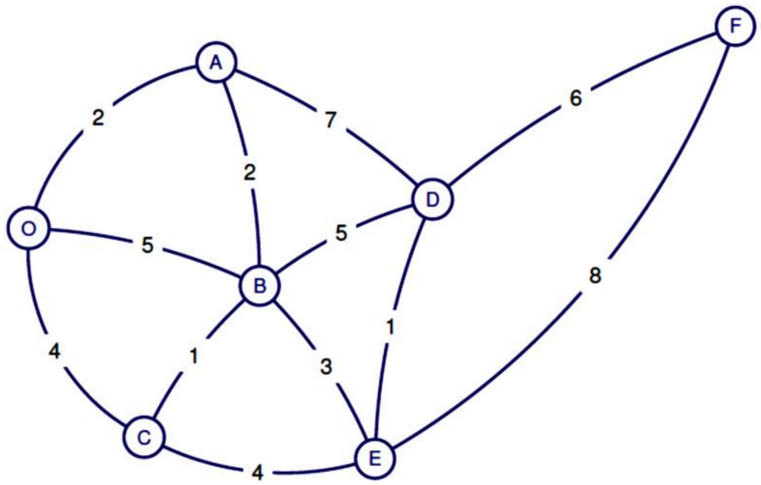


Déterminer un chemin de longueur minimale entre le départ d'eau en A et le bassin d'infiltration en K et donner sa longueur.

Exercice n°16 : Bac *ES* Polynésie 2017

Partie A :

Alex a téléchargé sur son smartphone un jeu lui permettant de combattre des animaux virtuels par localisation GPS. Le graphe pondéré représenté ci-dessous illustre le trajet qu'Alex doit suivre en marchant dans les rues de sa ville et le nombre d'animaux virtuels qu'il doit combattre sur la route suivie.



À l'aide d'un algorithme, déterminer le nombre minimal de créatures qu'Alex doit combattre s'il part du point O pour arriver au point F de la ville. Détailler les étapes de l'algorithme.

Partie B :

Alex retrouve d'autres personnes, ayant le même jeu, dans le parc de la ville dans le but de comparer le nombre de créatures qu'ils ont combattues. Le premier jour, 8 personnes se sont retrouvées dans le parc. Le second jour, on comptait 25 personnes et le troisième jour, 80 personnes se sont retrouvées dans le parc.

Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois nombres réels et x un nombre entier compris entre 1 et 10. On admet que la fonction f modélise le nombre de personnes qui se retrouvent dans le parc le $x^{\text{ème}}$ jour.

1) Traduire l'énoncé par un système de trois équations à trois inconnues a, b et c.
2) Vérifier que ce système est équivalent à l'équation $AX = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix}$$

3) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \\ -2{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) Calculer $M \times A$.
   b) Que représente la matrice M pour la matrice A ?
4) Le parc de la ville a une capacité d'accueil de 2 500 personnes. Selon ce modèle, le parc risque-t-il de refuser d'accueillir des personnes un de ces dix jours ? Justifier la réponse.