Matrices et recherche de courbes sous contraintes

A) Courbes sous contraintes : retour sur des cas simples.

La recherche d'une fonction polynomiale f de degré $n-1$ dont la courbe C_f passe par n points donnés conduit à écrire un système de n équations obtenues grâce à la relation :

$$A(x_A\ ;\ y_A) \in C_f \Leftrightarrow y_A = f(x_A)$$

Exemple :

On donne trois points $A(1\ ;\ 6)$, $B(3\ ;\ 8)$ et $C(0\ ;\ 2)$. On recherche la fonction f du second degré telle que sa courbe représentative passe par les points : A, B et C.
On pose : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres à déterminer. La recherche d'une fonction polynôme de degré 2 conduit à rechercher 3 réels a, b et c donc à résoudre un système ayant 3 inconnues. De même, pour une fonction de degré n, on recherche $n+1$ réels, donc un système ayant $n+1$ inconnues.

1) Existence d'une telle fonction :
On vérifie que les trois points ne sont pas alignés car sinon il s'agit d'une droite :
   - le coefficient directeur de la droite (AB) est :
$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{8-6} = 1$$
   - le coefficient directeur de la droite (BC) est :
$$\frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{0-3}{2-8} = 0{,}5$$

Ces coefficients directeurs ne sont pas égaux donc les droites (AB) et (BC) ne sont pas parallèles, les points A, B et C ne sont donc pas alignés.

2) Détermination du système donnant les valeurs :
   - $A(1\ ;\ 6) \in C_f \Leftrightarrow a \times 1^2 + b \times 1 + c = 6 \Leftrightarrow a + b + c = 6$
   - $B(3\ ;\ 8) \in C_f \Leftrightarrow a \times 3^2 + b \times 3 + c = 8 \Leftrightarrow 9a + 3b + c = 8$
   - $C(0\ ;\ 2) \in C_f \Leftrightarrow a \times 0^2 + b \times 0 + c = 2 \Leftrightarrow c = 2$

On obtient donc le système suivant : $\begin{cases} a+b+c=6 \\ 9a+3b+c=8. \\ c=2 \end{cases}$

3) Résolution du système :
N'ayant pas d'autre méthode, nous allons résoudre ce système « à la main » :

$$\begin{cases} a+b+c=6 \\ 9a+3b+c=8 \\ c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ a+b+2=6 \\ 9a+3b+2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ a+b=4 \\ 9a+3b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ a=4-b \\ 9(4-b)+3b=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ a=4-b \\ -6b=-30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ a=4-b \\ b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ a=-1. \\ b=5 \end{cases}$$

D'où la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 5x + 2$.

Conclusion : Cette résolution, si elle aboutie, reste néanmoins assez pénible du fait de la résolution du système. Nous allons donc chercher une méthode plus rapide pour le résoudre.

B) Matrices : introduction intuitive.

1. Qu'est-ce qu'une matrice ?

Voici les productions (en milliers) de deux usines de cycles appartenant à une même enseigne pour le premier semestre de l'année 2010 :

	VTT adultes	Vélos enfants	VTC	BMX	Vélos de course
Usine 1	12,99	13,20	5,58	1,53	1,95
Usine 2	4,62	4,98	2,16	0,51	0,78

Si on veut faire entrer les données de ce tableau dans un enchaînement de calcul, on les regroupe dans le tableau de nombres suivant appelé matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 12{,}99 & 13{,}20 & 5{,}58 & 1{,}53 & 1{,}95 \\ 4{,}62 & 4{,}98 & 2{,}16 & 0{,}51 & 0{,}78 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a 2 lignes et 5 colonnes. On dit que cette matrice est de format 2×5.
Elle contient 10 éléments, appelés « coefficients de la matrice ».

Pour repérer un coefficient d'une matrice, on indique son indice de ligne puis son indice de colonne, les lignes se comptant du haut vers le bas et les colonnes de la gauche vers la droite.
La disposition générale des coefficients de la matrice A est donc la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & \boldsymbol{a_{23}} & a_{24} & a_{25} \end{pmatrix}$$

a_{23} désigne le terme de la 2$^{\text{ème}}$ ligne et de la 3$^{\text{ème}}$ colonne : $a_{23} = 2{,}16$.

2. Matrices lignes et matrice colonnes.

La production de l'usine 1 pour le premier semestre 2011 peut être représentée par la matrice $(12{,}99 \quad 13{,}20 \quad 5{,}58 \quad 1{,}53 \quad 1{,}95)$ appelée « matrice ligne » de format 1×5.
La production des VTT adultes dans les deux usines est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 12{,}99 \\ 4{,}62 \end{pmatrix}$, qui est appelée « matrice colonne » de format 2×1.

3. Somme et différence de deux matrices.

Les productions (en milliers) des deux usines de cycles pour le second semestre de l'année 2010 sont les suivantes :

	VTT adultes	Vélos enfants	VTC	BMX	Vélos de course
Usine 1	11,79	15,84	4,38	1,29	1,59
Usine 2	3,78	4,14	2,40	0,51	0,66

Ces données sont représentées par la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 11{,}79 & 15{,}84 & 4{,}38 & 1{,}29 & 1{,}59 \\ 3{,}78 & 4{,}14 & 2{,}40 & 0{,}57 & 0{,}66 \end{pmatrix}$$

La matrice C représentant la production annuelle pour ces deux usines est obtenue en ajoutant termes à termes les coefficients des deux matrices A et B.
La matrice C est, par définition, la somme des matrices A et B.
On note : $C = A + B$.

La matrice C représentant la production annuelle pour ces deux usines est obtenue en ajoutant termes à termes les coefficients des deux matrices A et B.
La matrice C est, par définition, la somme des matrices A et B.
On note : $C = A + B$.
Si l'on appelle c_{ij} l'élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne et $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice C, on a, pour tout i égal à 1 ou 2 et pour tout j compris entre 1 et 5 : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

$$C = \begin{pmatrix} 24{,}78 & 29{,}04 & 9{,}96 & 2{,}82 & 3{,}54 \\ 8{,}40 & 9{,}12 & 4{,}56 & 1{,}08 & 1{,}44 \end{pmatrix}$$

Par définition, la matrice B est la différence des matrices C et A : $B = C - A$.
On a alors pour tout i égal à 1 ou 2 et pour tout j compris entre 1 et 5 : $b_{ij} = c_{ij} - a_{ij}$.

Remarques : ces opérations sont réalisables ***sur des matrices de même format****.*

4. Multiplication et division d'une matrice par un réel.

La matrice D qui représente la production mensuelle moyenne dans ces deux usines est obtenue en divisant chacun des coefficients c_{ij} par 12. Ainsi on obtient la matrice $D = \frac{1}{12}C$ qui vaut :

$$D = \begin{pmatrix} 2{,}065 & 2{,}42 & 0{,}83 & 0{,}235 & 0{,}295 \\ 0{,}7 & 0{,}76 & 0{,}38 & 0{,}09 & 0{,}12 \end{pmatrix}$$

On a alors pour tout i égal à 1 ou 2 et pour tout j compris entre 1 et 5 : $d_{ij} = \frac{1}{12}c_{ij}$.

C) Définition d'une matrice.

Définition :

Une **matrice** de **taille** $m \times n$ est un tableau de nombres formé de m lignes et n colonnes qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Le nombre a_{ij} (avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$) désigne le terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Remarques :

- *En général, on note une matrice avec une lettre majuscule ou avec le coefficient général entre parenthèses, par exemple* (a_{ij}).
- *Si* $i \geq 10$ *ou* $j \geq 10$ *on écrira* $a_{1,11}$ *et non* a_{111} *pour éviter la confusion avec* $a_{11,1}$.

Exemple :

Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de taille 2×3 égale à $A = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$.
Le coefficient a_{12} vaut 40 et le coefficient a_{21} vaut 70.

Définition : **Matrice ligne, matrice colonne et matrice carrée**

- Une matrice de taille $1 \times n$ est appelée matrice ligne de taille n.
- Une matrice de taille $n \times 1$ est appelée matrice colonne de taille n.
- Une matrice de taille $n \times n$ est appelée matrice carrée d'ordre n.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ sont respectivement une matrice ligne de taille 3, une matrice colonne de taille 2 et une matrice carrée d'ordre 2.

Définition : **Matrice identité**

La matrice identité d'ordre n est la matrice diagonale d'ordre n, notée I_n, dont la diagonale principale ne contient que des 1.

Exemple : L'identité d'ordre 3 est : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque : s'il n'y a pas d'ambiguïté, on note l'identité I sans préciser son ordre en indice.

D) Opérations sur les matrices.

1. Somme et différence de deux matrices.

Définition : **Somme de deux matrices**

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de même taille $m \times n$.

La somme des matrices A et B est la matrice notée $A + B$ définie par :

$A + B = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. pour tout couple $(i\,;\,j)$ tel que $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

Exemple : soient $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $A + B = \begin{pmatrix} -3+2 & 5+(-5) \\ -1+4 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Définition : **Différence de deux matrices**

Soient A et B deux matrices de même taille.

La différence des matrices A et B est la matrice notée $A - B$ égale à la somme $A + (-B)$ où $-B$ est la matrice opposée de B dont les coefficients sont les opposés des coefficients de B.

Exemple : soient $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Produit d'une matrice par un réel.

Définition : **Produit d'une matrice par un réel**

Soient A une matrice et k un nombre réel. Le produit de A par le réel k est la matrice notée kA dont les coefficients sont obtenus en multipliant tous les coefficients de A par k.

Exemple : soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 8 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $-2A = \begin{pmatrix} -2\times(-2) & -2\times 2 & -2\times 4 \\ -2\times 8 & -2\times(-5) & -2\times 0 \end{pmatrix}$.

D'où $-2A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -8 \\ -16 & 10 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Produit de deux matrices.

Définition : **Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne**

Le Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne de la matrice ligne $A = (a_{11} \quad \dots \quad a_{1n})$ par la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$ est noté AB et est égal au réel :

$$AB = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1})$$

Exemple : soient $A = (3 \quad 0 \quad -2)$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ on a alors :

$$AB = (3 \times (-1) + 0 \times (-4) + (-2) \times (-2)) = (1)$$

Définition : **Produit de deux matrices**

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times p$.
Le produit de A par B, noté AB, est la matrice $C = (c_{ij})$ de taille $m \times p$ telle que c_{ij} est égal au produit de la $i^{\text{ième}}$ ligne de A par la $j^{\text{ième}}$ colonne de B.

Remarques :

- Le produit d'une matrice A par une matrice B n'existe qu'à condition que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.
- Si le produit d'une matrice A par une matrice B existe **en général il n'est pas commutatif** : en premier lieu, BA n'existe pas toujours (il n'existe que si A et B sont des matrices carrées) et, même si c'est le cas, généralement on n'a pas $AB = BA$.

Méthode 1 : Multiplier « manuellement » deux matrices

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$: calculer $C = A \times B$.

Pour calculer la matrice C égale à $A \times B$:

1) on vérifie que le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.
   A est de taille 2×4 et B est de taille 4×3. A a autant de colonnes que B a de lignes, donc $C = AB$ existe et sa taille est 2×3.
2) on dispose les matrices suivant le schéma ci-dessous de sorte que c_{ij} soit à l'intersection du prolongement de la $i^{\text{ième}}$ ligne de A et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de B.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & -3 \\ \mathbf{3} & -1 & 0 \\ \mathbf{0} & -2 & 2 \\ \mathbf{2} & -3 & -4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{-2} \\ -2 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{7} & -6 & 15 \\ 0 & -2 & -8 \end{pmatrix} \end{array}$$

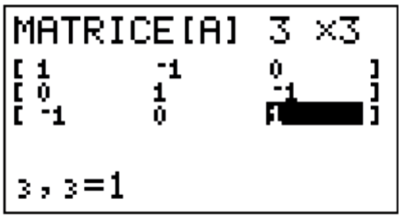
   On calcule alors, par exemple : $c_{11} = 1 \times 2 + 3 \times 3 + 5 \times 0 + (-2) \times 2 = 7$.

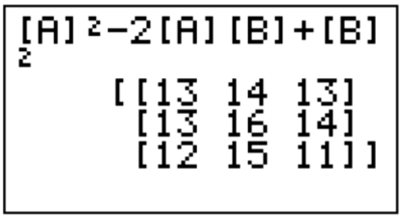
Remarque : il n'est pas nécessaire que l'une des matrices A ou B soit nulle pour que AB.
Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ on a alors $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

Méthode 2 : Effectuer un calcul matriciel avec la calculatrice

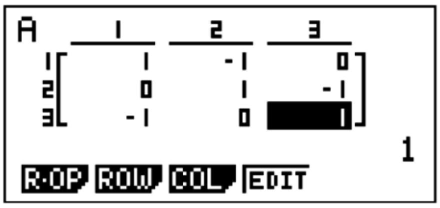
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$: calculer $A^2 + 2AB + B^2$.

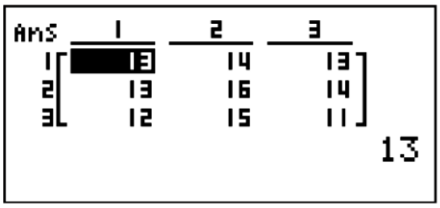
1) Avec une calculatrice TI :
   - Entrer dans le mode « Matrice » puis le menu "EDIT".
   - Saisir la taille de la matrice A puis ses coefficients. Pour les coefficients négatifs, utiliser la touche "(-)". Faire de même pour B.
   - Quitter le mode « Matrice » puis y entrer à nouveau et, dans le menu « NOMS », sélectionner la matrice [A]. Compléter la formule et taper « Entrer ».





2) Avec une calculatrice CASIO :
   - Entrer dans le menu "RUN-MAT" puis choisir ▸MAT.
   - Saisir la taille de la matrice A puis ses coefficients. Faire de même pour B.
   - Quitter ▸MAT, taper la formule en faisant précéder chaque nom de matrice par Mat.
   - La formule Mat A²-2Mat AMat B+Mat B² apparaît, il suffit alors d'exécuter.





Exercice n°1 :

Pour chaque mois du second trimestre 2011, on donne ci-dessous l'évolution en euros des prix HT (hors taxes) de 4 appareils reflex numériques :

$$P_{HT} = \begin{pmatrix} 750 & 690 & 790 & 830 \\ 740 & 690 & 760 & 800 \\ 720 & 660 & 740 & 750 \end{pmatrix}$$

Rappel : la TVA est de : 19,6%

1) Donner une relation liant P_{TTC}, P_{HT} et P_{TVA}.
2) Par quel calcul peut-on obtenir directement P_{TTC} à partir de P_{HT} ?

Exercice n°2 :

On considère les 4 matrices ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 3{,}2 & 4 \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} 2{,}8 & 4{,}1 & -7 \\ -3{,}9 & 2{,}75 & 0{,}5 \end{pmatrix} ; \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Indiquer si les produits ci-dessous sont possibles et préciser, si tel est le cas, la dimension de la matrice produit :

1) $A \times B$.
2) $B \times A$.
3) $B \times C$.
4) $C \times D$.
5) $A \times D$.
6) $D \times B$.

Exercice n°3 :

Dans chaque cas, la multiplication $A \times B$ a-t-elle une signification ? Si non, pourquoi ?

1) La première ligne de A désigne les quantités de jus d'orange achetées par Félix et Zoé et la seconde désigne les quantités de jus de pomme.
   B désigne les prix unitaires TTC, en euro, du jus d'orange et du jus de pomme.
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}.$$
2) La première ligne de A désigne le prix unitaires, en euro, d'une crêpe et d'une gaufre chez $SLOW$ et la seconde désigne les prix chez $FAST$.
   B désigne les quantités de crêpes et de gaufres à commander.
$$A = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 1{,}7 \\ 1{,}8 & 1{,}75 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}.,$$

Exercice n°4 :

Trois magasins spécialisés en informatique vendent, entre autres, des imprimantes, des cartouches d'encre et des ordinateurs. Pour chacun des matériels on s'intéresse uniquement à un modèle bien précis vendu en promotion durant un mois. À la fin de ce mois de promotion chaque magasin fait le bilan des ventes qui est résumé dans le tableau suivant :

		Matériel informatique		
		Cartouche	*Imprimante*	*Ordinateur*
Magasins	$M1$	26	18	30
	$M2$	28	22	20
	$M3$	24	15	25

Prix en euros		
Achat	*Vente*	
20	40	*Cartouche*
50	80	*Imprimante*
400	600	*Ordinateur*

1) Déterminer, <u>pour chacun des trois magasins</u>, quel était le montant total des achats de matériel.
2) Déterminer, <u>pour chacun des trois magasins</u>, la recette totale obtenue durant ce mois de promotion.
3) En déduire, <u>pour chacun des trois magasins</u>, le montant des bénéfices du mois.

Exercice n°5 :

Une entreprise doit équiper 5 salles en bureau, armoire, éclairage et chaise.

	Bureau	*Armoire*	*Eclairage*	*Chaise*
Salle 1	2	4	4	6
Salle 2	1	1	1	1
Salle 3	1	5	3	2
Salle 4	3	5	5	6
Salle 5	2	6	4	5

Le service comptable a relevé les prix unitaires, en euro, dans deux magasins d'ameublement spécialisés : $OFFI$ et $BURO$.

	Bureau	*Armoire*	*Eclairage*	*Chaise*
OFFI	129	56	55	27,50
BURO	132	61	48	26,50

1) Ecrire la matrice des quantités A et la matrice des prix B qui permettent de calculer le montant de la facture dans chacun des magasins.
   Attention à l'ordre d'écriture des matrices, afin que le produit $A \times B$ ait une signification.
2) Calculer $A \times B$ et interpréter les résultats obtenus.
3) Calculer le montant total des achats dans les magasins $OFFI$ et $BURO$.
4) Quel est le magasin le plus avantageux ?

Exercice n°6 :

Une entreprise fabrique deux types de produits notés A et B. Ces produits sont fabriqués sur trois sites de production S_1, S_2 et S_3.

En septembre 2012 :

- le site S_1 a fabriqué 50 milliers d'articles A et 70 milliers d'articles B ;
- le site S_2 a fabriqué 40 milliers d'articles A et 90 milliers d'articles B ;
- le site S_3 a fabriqué 120 milliers d'articles B ;

On représente la production du mois :

- de septembre 2012 à l'aide de la matrice $P_0 = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$.
- d'octobre 2012 à l'aide de la matrice $P_1 = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$.

Partie A :

1) Déterminer la matrice T_1 représentant la production totale des mois de septembre et octobre pour chaque site.
2) En novembre 2012, pour faire face à la demande, la direction décide d'augmenter de 10% la production du mois d'octobre de chaque article, dans chaque site. Déterminer la matrice P_2 représentant la production de novembre 2012.

Partie B :

1) Le coût de la main d'œuvre est le même pour chaque article fabriqué, mais il diffère selon le site de production. Pour S_1 le coût de la main d'œuvre est de 25€ ; pour S_2, il est de 28€ et pour S_3 il est de 30€.
   a) Représenter le coût de la main d'œuvre par une matrice colonne C.
   b) Calculer, à l'aide d'un produit de matrices, la matrice M_1 représentant le coût de la main d'œuvre, en octobre 2012, pour la fabrication des articles A et B.
2) Le prix de la matière première nécessaire à la fabrication de chaque article est de 18€ pour un article A et 22€ pour un article B.
   a) Représenter le coût de la matière première par une matrice ligne L.
   b) Calculer, à l'aide d'un produit de matrices, la matrice A_1 représentant le montant des achats de matière première nécessaire à la fabrication des articles en octobre 2012 pour chacun des trois sites.

Partie C :

1) 20% des articles A et 40% des articles B sont destinés à l'exportation.
   a) Calculer « manuellement » le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 50 & 40 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$$

   b) Donner une interprétation du produit :

$$\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 50 & 40 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) Le prix de vente d'un article A est de 56€ et celui d'un article B est de 62€.
   A l'aide d'un calcul matriciel, déterminer le chiffre d'affaire réalisé par cette entreprise en octobre 2012, en supposant que toute la production a été vendue.

E) **Matrices inverse.**

Rappels :

- Une matrice carrée est une matrice ayant le même nombre de lignes n que de colonnes.
  Sa dimension est $n \times n$ ou n^2. On parle de matrice carrée d'ordre n.
- La matrice identité I d'ordre n est la matrice composée de 0, sauf la diagonale qui ne contient que des 1.
  Soit A une matrice carrée d'ordre n, alors : $A \times I = I \times A = A$.

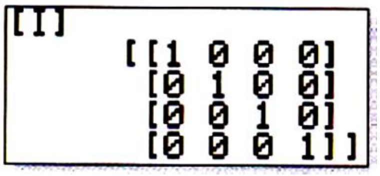
Définition :

La matrice inverse d'une matrice carrée A, si elle existe, est la matrice carrée telle que :

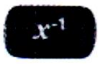
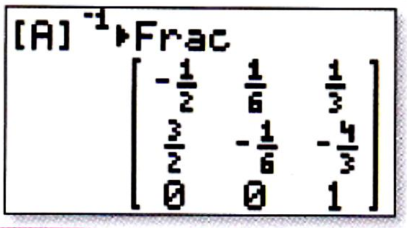
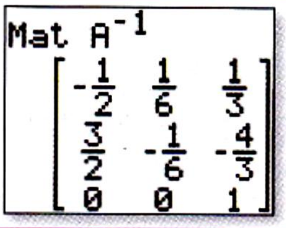
$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

Exemples :

- Matrice identité d'ordre 4 :

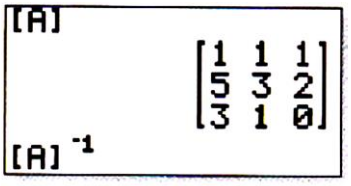


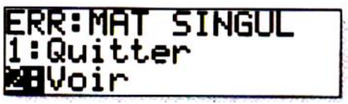
- La matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ s'obtient à la calculatrice par la touche inverse :

Sur TI™ : 	Sur Casio : 
	

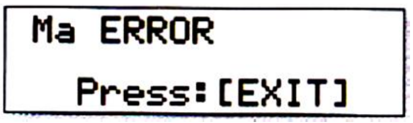
Remarque :

Toutes les matrices ne sont pas inversibles :



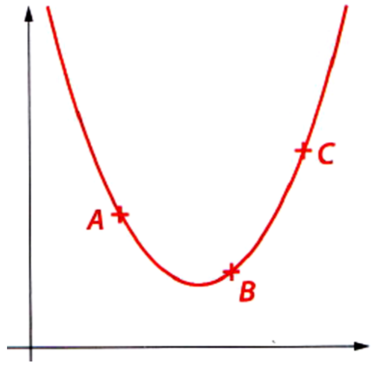


La calculatrice indique une erreur :



Lors de la résolution de système, cela indique que le système n'a pas de solution unique.

F) **Résolution d'un système par calcul matriciel.**



La recherche d'une fonction polynôme du second degré :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

dont la courbe C_f passe par trois points donnés, conduit à résoudre un système de 3 équations à 3 inconnues a, b et c. On parle de système 3×3. Sous certaines conditions sur ces points (non alignement), la fonction f est unique.

Si on cherche une fonction polynôme de degré 3 :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

quatre inconnues apparaissent : a, b, c et d. Il est nécessaire de connaître quatre points.

Généralisation :

Dans la résolution d'un système de n équations à n inconnues :

- la matrice A des coefficients du système est une matrice carrée d'ordre n.
- la matrice X des inconnues est une matrice colonne à n lignes.
- la matrice B des seconds membres est une matrice colonne à n lignes.

La recherche des coefficients de la fonction polynômiale f se traduit par un système qui s'écrit sous forme d'une équation matricielle :

$$A \times X = B$$

Si la matrice inverse de la matrice A existe, alors la fonction f existe et ses coefficients sont obtenus à la calculatrice par :

$$X = A^{-1} \times B$$

Remarque :

Quand on résoud de l'équation matricielle $A \times X = B$ on multiplie à gauche par A^{-1} si la matrice inverse existe : $A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B$ or $A^{-1} \times A = I$ d'où $A^{-1} \times A \times X = X$

Exemple :

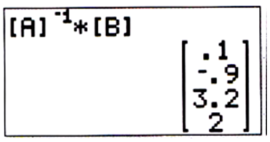
Le coût total de production est connu pour quelques niveaux de production :

$Quantité\ produite\ (en\ tonne) : x$	0	1	2	5
$Coût\ total\ (en\ milliers\ d'euros) : y$	2	4,4	5,6	8
$Point$	A	B	C	D

On cherche à modéliser par une fonction du 3ème degré : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
L'appartenance des points à C_f représentant la fonction f conduit à résoudre le système :

$$\begin{cases} d = 2 \\ a + b + c + d = 4{,}4 \\ 8a + 4b + 2c + d = 5{,}6 \\ 125a + 25b + 5c + d = 8 \end{cases} \text{ on pose } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 125 & 25 & 5 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4{,}4 \\ 5{,}6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

On a alors : $A \times X = B$ d'où $A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B$ et donc $X = A^{-1} \times B$.
A l'aide de la calculatrice on calcule :



Par lecture du résultat de la calculatrice, $a = 0{,}1$; $b = -0{,}9$; $c = 3{,}2$ et $d = 2$.
D'où la fonction : $f(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}9x^2 + 3{,}2x + 2$.

Exercice n°7 :

Pour chaque système, indiquer les inconnues, la matrice A des coefficients et la matrice B des seconds membres, puis les résoudre :

1) $\begin{cases} 3x + 5y = 15 \\ 4x + 10y = 24 \end{cases}$.

2) $\begin{cases} x + y + z = 125 \\ 2x + 3y + z = 136 \\ x + 2y + 3z = 143 \end{cases}$.

3) $\begin{cases} 9a + 3b + c = 9{,}2 \\ 16a + 4b + c = 10{,}8 \\ 25a + 5b + c = 12 \end{cases}$.

Exercice n°8 :

On considère la parabole P passant par les points $A(0\,;\,2)$; $B(3\,;\,3)$ et $C(6\,;\,6)$.

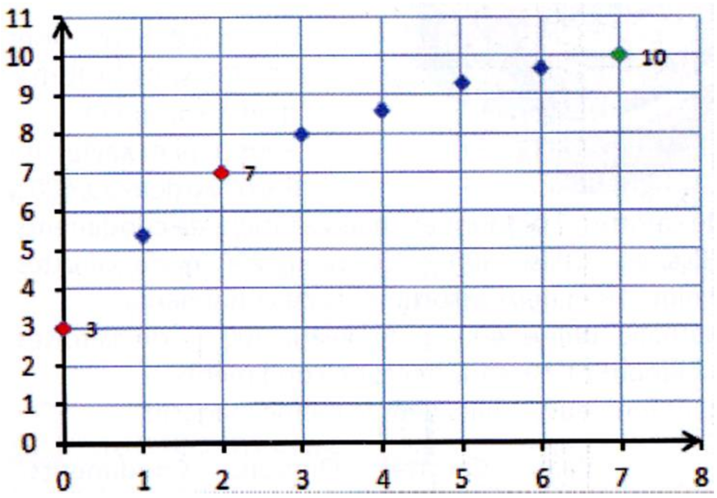
1) Montrer que ces points ne sont pas alignés.
2) Soit f la fonction associée à la parabole P telle que : $f(x) = ax^2 + bx + c$.
   a) Déterminer un système dont les réels a, b et c de cette fonction f sont solutions.
   b) Résoudre le système précédent et déterminer la fonction f recherchée.

Exercice n°9 :

Une ville a vu sa population augmenter entre 1975 et 2010. Marjorie, stagiaire aux services municipaux, a relevé la population tous les 5 ans, en dizaine de milliers d'habitants, et l'a représentée sur tableau ci-dessous :

Année	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
Rang x	**0**	1	**2**	**3**	4	5	6	**7**
Population $f(x)$	**3**	5,4	**7**	**8**	8,6	9,3	9,7	**10**

Elle a noté une tendance et décide de la modéliser par une fonction f de la forme :
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où x est le rang de l'année à partir de 1975. Pour déterminer cette fonction, elle choisit d'utiliser les quatre points de coordonnées entières.



1) Montrer que les réels a, b, c et d sont les solutions du système :
$$\begin{cases} d = 3 \\ 8a + 4b + 2c + d = 7 \\ 27a + 9b + 3c + d = 8 \\ 343a + 49b + 7c + d = 10 \end{cases}$$
2) Écrire ce système sous la forme $MX = Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.
3) On admet que la matrice M est inversible.
   Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le quadruplet $(a\,;\,b\,;\,c\,;\,d)$ solution du système (S).
4) Faire une prévision de population pour 2015.

Exercice n°10 : Bac *ES* Antilles-Guyane 2018

Un laboratoire en botanique étudie l'évolution d'une espèce végétale en fonction du temps.
Cette espèce compte initialement 2 centaines d'individus.
Au bout de 2 semaines, l'espèce végétale compte 18 centaines d'individus.
Au bout de 3 semaines, l'espèce végétale prolifère et s'élève à 30,5 centaines d'individus.
Au bout de 10 semaines, on en compte 90 centaines.
On modélise cette évolution par une fonction polynomiale f donnant le nombre d'individus de l'espèce, exprimé en centaine, en fonction du temps écoulé x, exprimé en semaine.
Ainsi $f(2) = 18$; $f(3) = 30{,}5$ et $f(10) = 90$.

On admet que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a, b, c et d, sont des réels.

1) Justifier que $d = 2$.
2) Montrer que a, b et c sont solutions du système :

$$\begin{cases} 8a + 4b + 2c = 16 \\ 27a + 9b + 3c = 28{,}5 \\ 1000a + 100b + 10c = 88 \end{cases}$$

3) Déterminer les matrices A, X et B qui permettent d'écrire le système précédent sous la forme :

$$AX = B$$

4) Résoudre le système.
5) En supposant que l'évolution suit, sur l'intervalle $[0\,;\,13]$, le modèle décrit par la fonction f , déterminer au bout de combien de temps la quantité de l'espèce étudiée sera maximale (arrondir à la semaine près).

Exercice n°11 : Bac Pro *Artisanat et métiers d'arts, option horlogerie* 2007

Pour modifier les propriétés physiques de leurs pièces, les artisans horlogers ont recours à des traitements thermiques consistant en un ensemble d'opérations de chauffage et de refroidissement.
Parmi ces techniques, le revenu, est un traitement permettant de modifier la résilience, c'est-à-dire la capacité d'allongement de la pièce.
L'entreprise « Traitherme » désire modéliser les variations de la résilience en fonction de la température. On considère des températures comprises entre $100°C$ et $750°C$.

Dans la suite, la température t est exprimée en centaines de degrés Celsius et varie donc entre 1 et 7,5. La résilience R s'exprime par la relation : $R(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, où a, b, c et d, sont des coefficients réels à déterminer.

1) En sachant $R(1) = 11$, $R(3) = 9$, $R(4) = 20$ et $R(7) = 29$ déterminer un système d'équations vérifié par les coefficients a, b, c et d.
2) Déterminer à l'aide de la calculatrice la matrice : inverse de la matrice A ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \\ 343 & 49 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) A l'aide de ce qui précède, déterminer les valeurs des coefficients a, b, c et d.
4) On considère la fonction f définie sur $[1\,;\,7{,}5]$ par : $f(x) = -x^3 + 12x^2 - 36x + 36$.
   a) Etudier les variations de f sur $[1\,;\,7{,}5]$.
   b) En déduire la température permettant d'obtenir la résilience maximum.
   c) Etudier la convexité de la fonction f sur $[1\,;\,7{,}5]$ et en déduire les coordonnées du point d'inflexion de la courbe représentative C_f de f.

Exercice n°12 : Bac ES Pondichéry 2014

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

$Nombre\ de\ recharges\ en\ milliers$	1	3	5
$Coût\ total\ annuel\ de\ production\ en\ centaines\ d'euros$	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\ ;\ \ 10]$ par : $C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 10$, où a, b et c, sont des nombres réels. Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros. On admet que le triplet $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est solution du système $(S)\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 27a + 9b + 3c = 17{,}4 \\ 125a + 25b + 5c = 73 \end{cases}$ et on pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

1) Écrire ce système sous la forme $MX = Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.
2) On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ solution du système(S).
3) En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8000 recharges d'eau produites ?

Exercice n°13 : Coûts de production et prix de vente

Pour la fabrication de deux produits A et B, on distingue quatre facteurs techniques de production : des unités de matières premières, des unités de conditionnement, des unités de main d'œuvre et des unités d'énergie.

Le tableau suivant indique les quantités d'unités de ces facteurs nécessaires à la production d'une unité de produit A et à celle d'une unité de produit B ainsi que la valeur estimée du coût de revient d'une unité de chacun de ces facteurs.

$Facteurs\ techniques$	$Produit\ A$	$Produit\ B$	$Coût\ de\ revient\ unitaire\ du\ facteur\ (en\ euros)$
$Nombre\ d'unités\ de\ matières\ premières$	5	6	3
$Nombre\ d'unités\ de\ conditionnement$	3	4	1
$Nombre\ d'unités\ de\ main\ d'oeuvre$	4	3	4
$Nombre\ d'unités\ d'énergie$	1	2	2

La marge bénéficiaire sur chaque produit A et B est un pourcentage du coût total de production. Elle est égale à 30% pour le produit A et à 35% pour le produit B.

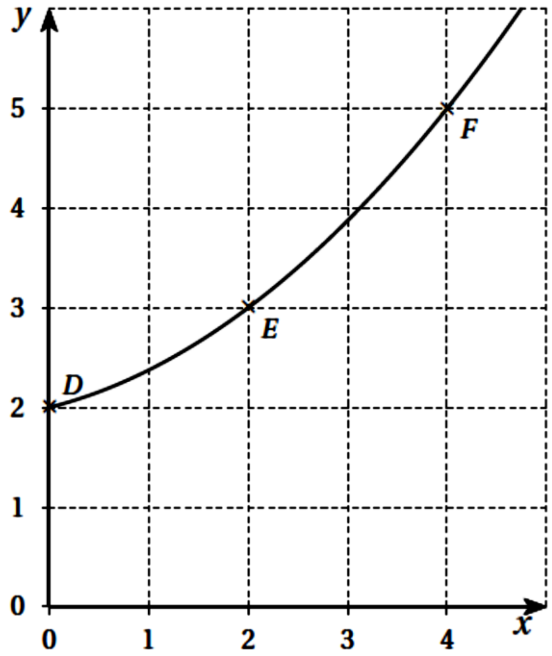
On considère les matrices suivantes :

- $F = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ dont les éléments sont les quantités de facteurs de production nécessaires à la fabrication des deux produits A et B.
- U dont les éléments sont les coûts unitaires des facteurs de production.
- C dont les éléments sont les coûts totaux de production des produits A et B.
- V dont les éléments sont les prix de vente des deux produits A et B.

1) Déterminer les éléments de la matrice U de façon à ce que le produit des matrices F et U soit égal à la matrice C des coûts de production.
2) En déduire que le coût total de production du produit A est 36€ et que celui de B est 38€.
3) Justifier que la matrice V des prix de vente est : $V = \begin{pmatrix} 46{,}8 \\ 51{,}3 \end{pmatrix}$.
4) Un client commande 150 unités de produit A et 200 unités de produit B.
   A l'aide d'un produit de matrices (que vous donnerez), calculer le montant total (en euros) de la commande.

Exercice n°14 : Bac *ES* Amérique du Nord 2015

Un créateur d'entreprise a lancé un réseau d'agences de services à domicile.
Depuis 2010, le nombre d'agences n'a fait qu'augmenter. Ainsi, l'entreprise qui comptait 200 agences au 1er janvier 2010 est passée à 300 agences au 1er janvier 2012 puis à 500 agences au 1er janvier 2014.
On admet que l'évolution du nombre d'agences peut être modélisée par une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c, sont trois nombres réels.
La variable x désigne le nombre d'années écoulées depuis 2010 et $f(x)$ exprime le nombre d'agences en centaines. La valeur 0 de x correspond donc à l'année 2010.
Sur le dessin ci-dessous, on a représenté graphiquement la fonction f.



On cherche à déterminer la valeur des coefficients a, b et c.

1) A partir des données de l'énoncé, écrire un système d'équations traduisant cette situation.
2) En déduire que le système précédent est équivalent à : $MX = R$ avec :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R \text{ un matrice colonne qu'on précisera.}$$

3) On admet que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}125 & -0{,}25 & 0{,}125 \\ -0{,}75 & 1 & -0{,}25 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   A l'aide de cette matrice, déterminer les valeurs des coefficients a, b et c en détaillant les calculs.
4) Suivant ce modèle, déterminer le nombre d'agences que l'entreprise possédera au 1er janvier 2016.

Exercice n°15 : Bac *ES* Polynésie 2016

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Existe-t-il un nombre réel a pour lequel B est l'inverse de A ?

Exercice n°16 :

Une entreprise vend quatre types de produits notés P_1, P_2, P_3 et P_4. La matrice des commandes de trois clients notés X, Y et Z est : $C = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 5 & 15 \\ 13 & 0 & 12 & 5 \\ 2 & 7 & 13 & 8 \end{pmatrix}$ les lignes étant relatives aux clients et les colonnes aux produits.

1) Effectuer « manuellement » le produit $C \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et interpréter le résultat.
2) Effectuer « manuellement » le produit $(1 \quad 1 \quad 1) \times C$ et interpréter le résultat.
3) Les prix unitaires de chacun des quatre produits sont respectivement $45€$, $15€$, $20€$ et $30€$. Calculer à l'aide d'un produit de deux matrices, le montant en euros de la commande de chacun des clients.

Exercice n°17 : Bac *ES* Polynésie 2015

Un constructeur de planches de surf fabrique 3 modèles. La conception de chaque modèle nécessite le passage par 3 postes de travail.
Le **tableau 1** indique le nombre d'heures nécessaires par modèle et par poste pour réaliser les planches et le **tableau 2** indique le coût horaire par poste de travail.

$Tableau\ 1$	$Poste\ 1$	$Poste\ 2$	$Poste\ 3$
$Modèle\ 1$	$8h$	$10h$	$14h$
$Modèle\ 2$	$6h$	$6h$	$10h$
$Modèle\ 1$	$12h$	$10h$	$18h$

$Tableau\ 2$	
$Poste\ 1$	$25€/h$
$Poste\ 2$	$20€/h$
$Poste\ 3$	$15€/h$

a) Soit H et C les deux matrices suivantes : $H = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 6 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 18 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.
Donner la matrice produit : $P = H \times C$.
b) Que représentent les coefficients de la matrice $P = H \times C$?

1) Après une étude de marché, le fabricant souhaite que les prix de revient par modèle soient les suivants :
   - Modèle 1 : $500€$
   - Modèle 2 : $350€$
   - Modèle 3 : $650€$.

   Il cherche à déterminer les nouveaux coûts horaires par poste, notés a, b et c permettant d'obtenir ces prix de revient.

   a) Montrer que les réels a, b et c doivent être solutions du système : $H \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix}$.

   b) Déterminer les réels a, b et c.

G) Calculatrice et calcul matriciel.

TI-82 *Stats.fr*		Casio *Graph 35+*	
On choisit de créer la matrice carrée $A=\begin{bmatrix}2&9&4\\7&5&3\\6&1&8\end{bmatrix}$.			
matrice ◁ On peut aussi faire ▷ ◁ au lieu de ◁	NOMS MATH EDIT 1: [A] 2: [B] 3: [C] 4: [D] 5: [E] 6: [F] 7↓[G]	MENU (RUN) EXE F3 (▷ MAT)	Matrix Mat A :None Mat B :None Mat C :None Mat D :None Mat E :None Mat F :None
1	MATRICE[A] 1 ×1 [0]	EXE	Dimension m×n m :1 n :1 Mat F :None
3 entrer 3 entrer (indique la dimension de [A])	MATRICE[A] 3 ×3 [0 0 0] [0 0 0] [0 0 0] 1,1=0	3 EXE 3 EXE EXE	0
2 entrer 9 entrer 4 entrer 7 entrer 5 entrer 3 entrer 6 entrer 1 entrer 8 entrer	MATRICE[A] 3 ×3 [2 9 4] [7 5 3] [6 1 8] 3,3=8	2 EXE 9 EXE… 1 EXE 8 EXE	8
2nde quitter matrice	NOMS MATH EDIT 1: [A] 3×3 2: [B] 3: [C] 4: [D] 5: [E] 6: [F] 7↓[G]	EXIT EXIT	
1 entrer (affiche la matrice [A])	[A] [[2 9 4] [7 5 3] [6 1 8]]	MENU (RUN) EXE OPTN F2 (MAT) F1 (Mat) ALPHA A EXE	Mat A [2 9 4] [7 5 3] [6 1 8]
On choisit de créer la matrice carrée $B=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&1&2\\1&3&4\end{bmatrix}$			
matrice ◁ 2	MATRICE[B] 1 ×1 [0]	EXIT EXIT F3 (▷ MAT) ▽	Matrix Mat A : 3× 3 Mat B :None Mat C :None Mat D :None Mat E :None Mat F :None

3 entrer 3 entrer	MATRICE[B] 3 ×3 [0 0 0] [0 0 0] [0 0 0] 1,1=0	EXE 3 EXE 3 EXE EXE	B 1 2 3 1 [0 0 0] 2 [0 0 0] 3 [0 0 0] 0
2 entrer 1 entrer 1 entrer 1 entrer 1 entrer 2 entrer 1 entrer 3 entrer 4 entrer	MATRICE[B] 3 ×3 [2 1 1] [1 1 2] [1 3 4] 3,3=4	2 EXE 1 EXE … 3 EXE 4 EXE	B 1 2 3 1 [2 1 1] 2 [1 1 2] 3 [1 3 4] 4
Addition de deux matrices		**On additionne [A] et [B]**	
2nde quitter matrice 1 + matrice 2 entrer	[A]+[B] [[4 10 5] [8 6 5] [7 4 12]]	EXIT EXIT MENU (RUN) EXE OPTN F2 (MAT) F1 (Mat) ALPHA A + F1 (Mat) ALPHA B EXE	Mat A+Mat B [4 10 5] [8 6 5] [7 4 12]
Multiplication par un réel		**On multiplie [A] par 3**	
3 × matrice 1 entrer (le × n'est pas obligatoire)	3*[A] [[6 27 12] [21 15 9] [18 3 24]]	3 × F1 (Mat) ALPHA A EXE	3×Mat A [6 27 12] [21 15 9] [18 3 24]
Matrices particulières			
Matrice identité d'ordre 3			
matrice ▷ $\underbrace{5}_{\text{dim}}$ 3) entrer (en changeant le 3 en 2 on a I_2)	identité(3) [[1 0 0] [0 1 0] [0 0 1]]	MENU (RUN) EXE OPTN F2 (MAT) F6 (▷) F1 (Iden) $\underbrace{3}_{\text{dim}}$ → F6 (▷) F1 (Mat) ALPHA I EXE	Identity 3→Mat I [1 0 0] [0 1 0] [0 0 1]
Matrice transposée de A			
matrice 1 matrice ▷ 2 entrer	[A]ᵀ [[2 7 6] [9 5 1] [4 3 8]]	MENU (RUN) EXE OPTN F2 (MAT) F4 (Trn) F1 (MAT) ALPHA A EXE	Trn Mat A [2 7 6] [9 5 1] [4 3 8]
⚠	Noter les différences entre ▷ MAT ; MAT et Mat ; le 1[er] est obtenu à partir de F3, le 2[nd] à partir de F2, le 3[e] à partir de F1.		

TI-82 *Stats.fr*		Casio *Graph 35+*	
Multiplication de deux matrices		**On multiplie [A] par [B]**	
matrice 1 × matrice 2 entrer	[A]*[B] [[17 23 36] [22 21 29] [21 31 40]]	MENU (RUN) EXE OPTN F2 (MAT) F1 (Mat) ALPHA A × F1 (Mat) ALPHA B EXE	Mat A×Mat B [[17 23 36] [22 21 29] [21 31 40]]
	On multiplie [B] par [A]		
matrice 2 × matrice 1 entrer	[[17 23 36] [22 21 29] [21 31 40]] [B]*[A] [[17 24 19] [21 16 23] [47 28 45]]	F1 (Mat) ALPHA B × F1 (Mat) ALPHA A EXE	[21 31 40] Mat B×Mat A [[17 24 19] [21 16 23] [47 28 45]]
Élever une matrice à une puissance *n*		**On calcule $[A]^3$**	
matrice 1 ^ 3 entrer (pour $n = 2$ on peut faire matrice 1 x^2 entrer)	[A]^3 [[1053 1221 1101… [1173 1125 1077… [1149 1029 1197…	F1 (Mat) ALPHA A ^ 3 EXE	Mat A^3 [[1053 1221 1101] [1173 1125 1077] [1149 1029 1197]]

Inverse d'une matrice		**Inverse de [B]**	
matrice 2 x^{-1} entrer ▷ (la touche ▷ permet de faire défiler l'écran)	$[B]^{-1}$ …5 .25 -.25… …5 -1.75 .75… …-.5 1.25 -.25…	F1 (Mat) ALPHA B SHIFT x^{-1} EXE Puis, éventuellement, F ↔ D pour le mode décimal.	Mat B^{-1} [[0.5 0.25 -0.25] [0.5 -1.75 0.75] [-0.5 1.25 -0.25]]
	Inverse de $C = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$		
matrice 3 x^{-1} entrer (*C* n'est pas inversible)	ERR:MAT SINGUL 1:Quitter 2:Voir	F1 (Mat) ALPHA C SHIFT x^{-1} EXE	Ma ERROR Press:[EXIT]