Calcul intégral

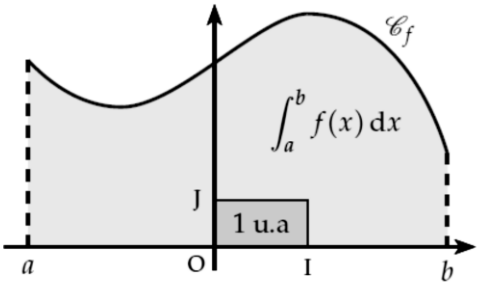
A) Intégrale d'une fonction continue et positive.

1. Définition.

Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ de courbe représentative C_f dans un repère orthogonal $(O\,;\,I\,;\,J)$. On appelle :

- **Unité d'aire ($\boldsymbol{u.a}$)** : l'aire du rectangle bâti à partir des points O, I et J.
- **Domaine sous la courbe** : domaine délimité par la courbe C_f , l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ (avec $a \leq b$).
  Ce domaine est l'ensemble des point $M(x\,;y)$ du plan tels que :
  $$a \leq x \leq b \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x)$$
- **Intégrale de f sur** $[a\,;b]$: la mesure de l'aire en $u.a.$ du domaine situé sous la courbe C_f.
  On la note : $\int_a^b f(x)\,dx$.

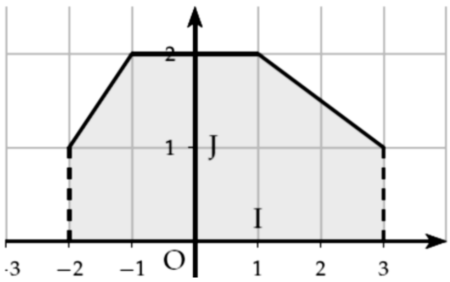


Remarques :

- $\int_a^b f(x)\,dx$ se lit : « somme ou intégrale de a à b de $f(x)\,dx$ ».
- La variable « x » est une variable muette, c'est à dire qu'elle n'est plus présente lorsque le calcul est effectué.
- La variable x peut être remplacée par : t, u, ou toute autre lettre à l'exception de a et b.

2. Calculs d'une aire avec des aires de formes connues.

On donne la représentation d'une fonction f sur $[-2\,;3]$ avec : $OI = 2cm$ et $OJ = 3\ cm$



L'unité d'aire vaut : $OI \times OJ = 2 \times 3 = 6\ cm^2$.

- Pour calculer l'intégrale $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$, il faut calculer l'aire sous la courbe en unité d'aire soit le nombre de rectangles. Il y a 7 rectangles pleins un demi rectangle en haut à gauche et un triangle en haut à droite de côté respectifs 2 et 1 soit $2 \times 1 \div 2 = 1$ rectangle.
  On en déduit donc : $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = 8{,}5\ u.a$ et $A = 8{,}5 \times 6 = 51\ cm^2$

Vidéo : [calculer une intégrale par calcul d'aire]

3. Approximation à partir de rectangle : méthode de *Reimann*.

On souhaite calculer l'intégrale de la fonction : $f : x \in [0\,;1] \mapsto x^2$ mais ce domaine n'étant pas polygonal, on ne connaît (pour l'instant) aucune formule permettant de calculer son aire.

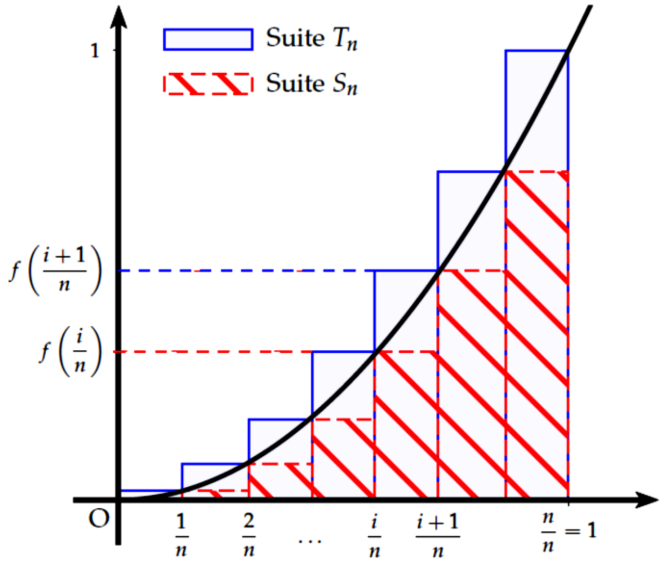
L'idée de Riemann est d'encadrer cette aire par deux séries de rectangles en divisant l'intervalle [0 ; 1] en n parties :

$$I_i = \left[\frac{i}{n}\,;\frac{i+1}{n}\right]$$

Sur chaque petit intervalle I_i, on détermine la valeur minimale et maximale de la fonction carrée. Comme cette dernière est croissante sur [0 ; 1], on en déduit que sur I_i :

$$\text{Valeur minimale de } f = f\left(\frac{i}{n}\right) \quad \text{et} \quad \text{Valeur maximale de } f = f\left(\frac{i+1}{n}\right)$$

On obtient alors ces deux séries de rectangles comme la figure ci-dessous :



On définit deux suites à partir de la fonction :

- La suite (S_n) somme des aires des rectangles hachurés « en dessous de la courbe » :
$$S_n = 0^2 \times \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} + \cdots + + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} = \frac{0^2 + 1^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3}$$
- La suite (T_n) somme des aires des rectangles hachurés « au-dessus de la courbe » :
$$T_n = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} + \cdots + +1^2 \times \frac{1}{n} = \frac{1^2 + 2^2 \ldots + n^2}{n^3}$$

On vient de créer deux suites qui vérifient les trois propriétés ci-dessous :

1) (S_n) est croissante et (T_n) est décroissante (admis).
2) $\forall n \geq 1$ on a : $0 \leq S_n \leq A \leq T_n$.
3) $\forall n \geq 1 \;\; T_n - S_n = \frac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n - S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

On en déduit que (S_n) et (T_n) convergent vers une même limite qui ne peut être que A.
A l'aide d'un algorithme classique, obtient alors les résultats suivants à 10^{-4} près :

n	5	10	20	100	1000
S	0,2400	0,2850	0,3088	0,3284	0,3328
T	0,4400	0,3850	0,3588	0,3384	0,3338

On déduit des résultats de S_{1000} et T_{1000} que $A \approx 0{,}33$.
On peut améliorer la précision cherchant la valeur pour des rangs plus grands.

B) Primitive.

1. Théorème fondamental.

Théorème : Dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ la fonction définie par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

On peut alors affirmer que F est la primitive de f qui s'annule en a et donc : $F' = f$.

Vidéo : étudier une fonction définie par une intégrale

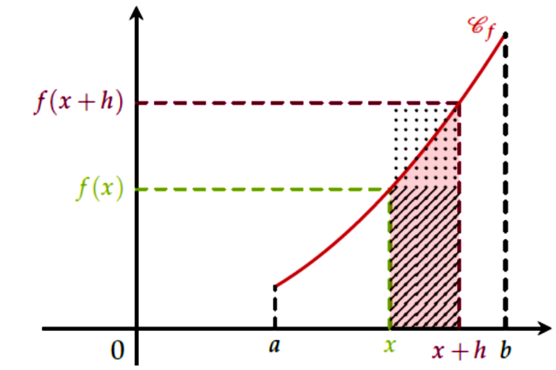
Démonstration :

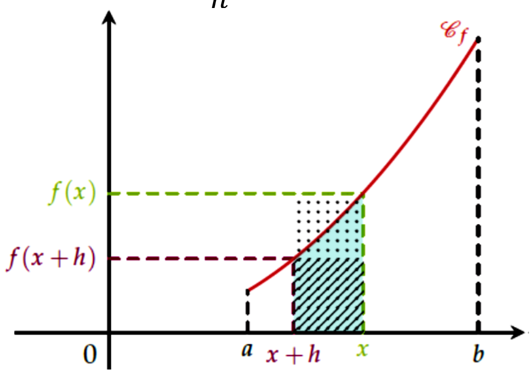
Pour tout $x \in [a\,;b]$, $F(x)$ existe bien puisqu'il s'agit de l'aire du domaine compris entre C_f et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a\,;x]$. Démontrons maintenant que F est dérivable sur $[a\,;b]$.

On considère alors, pour tous $x \in [a\,;b]$ et $h \neq 0$ tel que $x+h \in [a\,;b]$, :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

- Si $h > 0$ (voir schéma de gauche ci-dessous), $F(x+h)-F(x)$ représente l'aire du domaine compris entre C_f et l'axe des abscisses, sur $[x\,;x+h]$,.
  f étant croissante, cette aire est comprise entre celles des rectangles de largeur h et de hauteurs respectives $f(x)$ et $f(x+h)$, d'où :
  $$hf(x) \leq F(x+h)-F(x) \leq hf(x+h) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq f(x+h)$$
- Si $h < 0$ (voir schéma de droite ci-dessous), $F(x+h)-F(x)$ représente l'aire du domaine compris entre C_f et l'axe des abscisses, sur $[x\,;x+h]$.
  f étant croissante, cette aire est comprise entre celles des rectangles de largeur h et de hauteurs respectives $f(x+h)$ et $f(x)$, d'où :
  $$hf(x+h) \leq F(x+h)-F(x) \leq hf(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x+h) \geq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \geq f(x)$$





f étant une fonction continue, on a $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, d'après le théorème des gendarmes, (dans les deux cas) on conclut que :

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

D'où :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est bien dérivable sur $[a\,;b]$ elle vérifie donc : $F' = f$ et $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$

Vidéo : $F(x) = \int (a;x)\ f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a

C) Intégrale d'une fonction continue.

On étend toutes les propriétés précédentes établies pour des fonctions continues et positives sur un intervalle $[a\,;b]$ aux fonctions continues et de signe quelconque sur un intervalle $[a\,;b]$.

1. Calcul à partir d'une primitive.

Propriété : Calcul pratique d'une intégrale

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ et F une primitive de f sur $[a\,;b]$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple :

On souhaite calculer $\int_{-1}^{2} x^2 - 2\,dx$. Pour cela, on pose $f : x \longmapsto x^2 - 2$ définie sur $I = [-1\,;2]$.
Une primitive de f sur I est :

$$F : x \longmapsto \frac{x^3}{3} - 2x$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} x^2 - 2\,dx &= \left[\frac{x^3}{3} - 2x\right]_{-1}^{2} \\ &= F(2) - F(-1) \\ &= \left(\frac{2^3}{3} - 2\times 2\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 2\times(-1)\right) = -3\end{aligned}$$

Vidéo : calculer une intégrale : polynôme

Vidéo : calculer une intégrale : quotient

Vidéo : calculer une intégrale : exponentielle

2. Propriétés algébriques de l'intégrale.

Propriété :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et alors :

1) $\forall a \in I$ on a : $\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$.

2) $\forall a \in I$ et $\forall b \in I$ on a : $\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b) = -\big(F(b) - F(a)\big) = -\int_a^b f(x)\,dx$

3) Relation de Chasles : $\forall a \in I$, $\forall b \in I$ et $\forall c \in I$ on a : $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

Propriété : Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b, alors pour tous les réels α et β, on a :

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$$

Vidéo : calculer une intégrale à l'aide des formules de linéarité

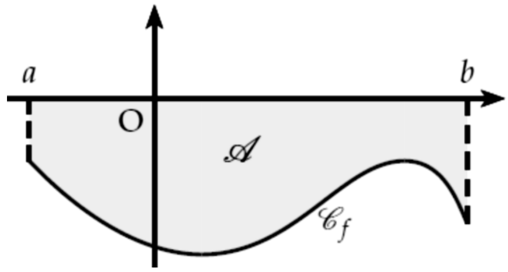
3. Intégrale et aire.

Propriété : Relation entre aire et intégrale

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ et telle que $f \leq 0$ sur $[a\,;b]$ et A l'aire délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.

On a alors :

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

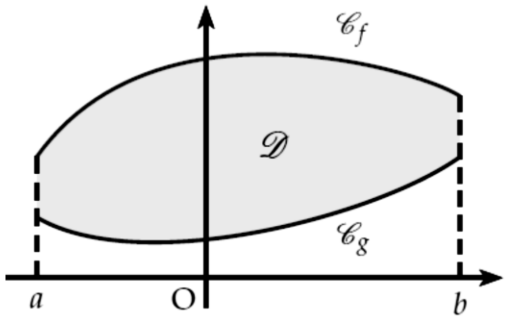


Propriété : aire entre deux courbes

Soient deux fonctions f et g continues sur $[a\,;b]$ telles que $f \geq g$ et D l'aire comprise entre les deux courbes et les droites $x = a$ et $x = b$.

On a alors :

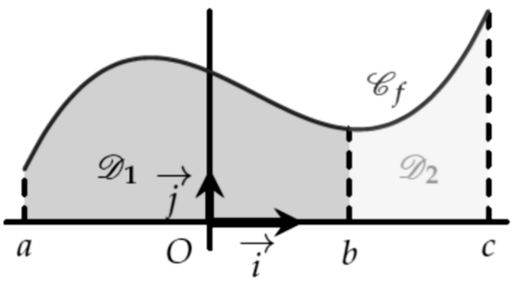
$$D = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$



Vidéo : calculer l'aire entre deux courbes

Remarque :

Lorsque f est positive et continue sur $[a\,;c]$ et que $b \in [a\,;c]$, la relation de Chasles est la simple traduction de l'additivité des aires de deux domaines adjacents :



$A_{D_1} = \int_a^b f(x)\,dx \qquad A_{D_2} = \int_b^c f(x)\,dx$

On en déduit que :

$$A_{Totale} = A_{D_1} + A_{D_2} = \int_a^c f(x)\,dx$$

<u>Méthode</u> : Calculer une aire entre deux courbes

Soient $f : x \longmapsto x^2 - 4$ et $g : x \longmapsto (x-2)(x+2)(x+1)$ définies sur $\mathbb{R}$.
Déterminer l'aire, en $u.a.$, du domaine compris entre les courbes C_f et C_g, sur l'intervalle $[-2\,;2]$.

1) Commencer par étudier sur I les positions relatives des courbes C_f et C_g puis décomposer l'intervalle I en sous-intervalles sur lesquels $f-g$ garde un signe constant.
2) Sur chaque sous intervalle, calculer, selon les cas, l'intégrale de $f-g$ ou de $g-f$.

1) On calcule la différence : $f(x)-g(x) = x^2 - 4 - (x-2)(x+2)(x+1)$.
En factorisant, on obtient : $f(x)-g(x) = (x^2-4)(1-x-1) = -x(x^2-4)$.
On en déduit le tableau de signes suivant :

x	-2		0		2
x^2-4	0	$-$		$-$	0
$-x$		$+$	0	$-$	
$f(x)-g(x)$	0	$-$	0	$+$	0

On découpe $I = [-2\,;2]$ en deux sous-intervalles $I_1 = [-2\,;0]$ et $I_2 = [0\,;2]$ sur lesquels on intègre respectivement $g-f$ et $f-g$.

2) Ainsi $A_D = \int_{-2}^{0} x(x^2-4)\,dx + \int_0^2 -x(x^2-4)\,dx = \int_{-2}^{0} x(x^2-4)\,dx - \int_0^2 x(x^2-4)\,dx$
$\varphi : x \longmapsto x(x^2-4)$ est du type $u' \times u^1$ avec $u = x^2-4$ et $u' = 2x$ définies sur $[-2\,;2]$.
On a alors pour tout $x \in [-2\,;2]$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \times 2x(x^2-4)$$

Une primitive de φ sur $[-2\,;2]$ est :

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(x^2-4)^2 = \frac{(x^2-4)^2}{4}$$

D'où :

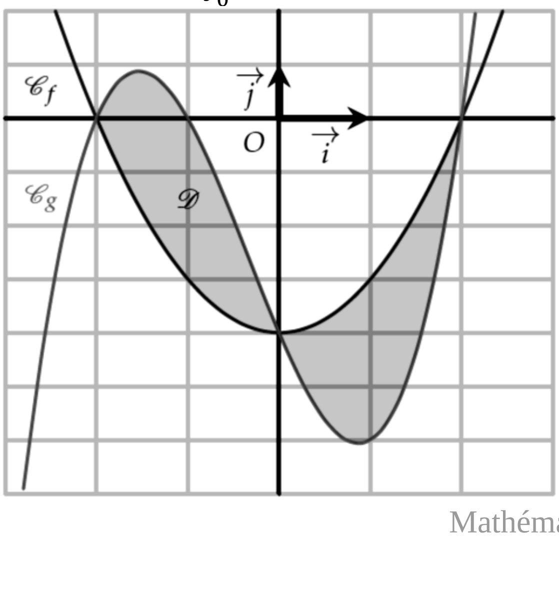
$$A_D = \int_{-2}^{0} x(x^2-4)\,dx - \int_0^2 x(x^2-4)\,dx = \left[\frac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{-2}^{0} - \left[\frac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{0}^{2}$$

Or :

$$\left[\frac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{-2}^{0} = \frac{(-4)^2}{4} - \frac{0^2}{4} = 4 \quad \text{et} \quad \left[\frac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{0}^{2} = \frac{0^2}{4} - \frac{(-4)^2}{4} = -4$$

Donc :

$$A_D = \int_{-2}^{0} x(x^2-4)\,dx - \int_0^2 x(x^2-4)\,dx = 4 - (-4) = 8\,u.a$$



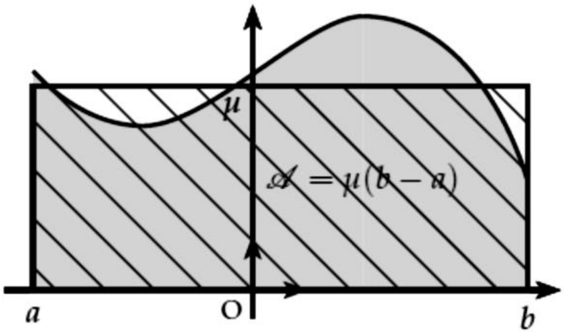
2. Intégrale et valeur moyenne.

Propriété :

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$. La valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ est définie par :

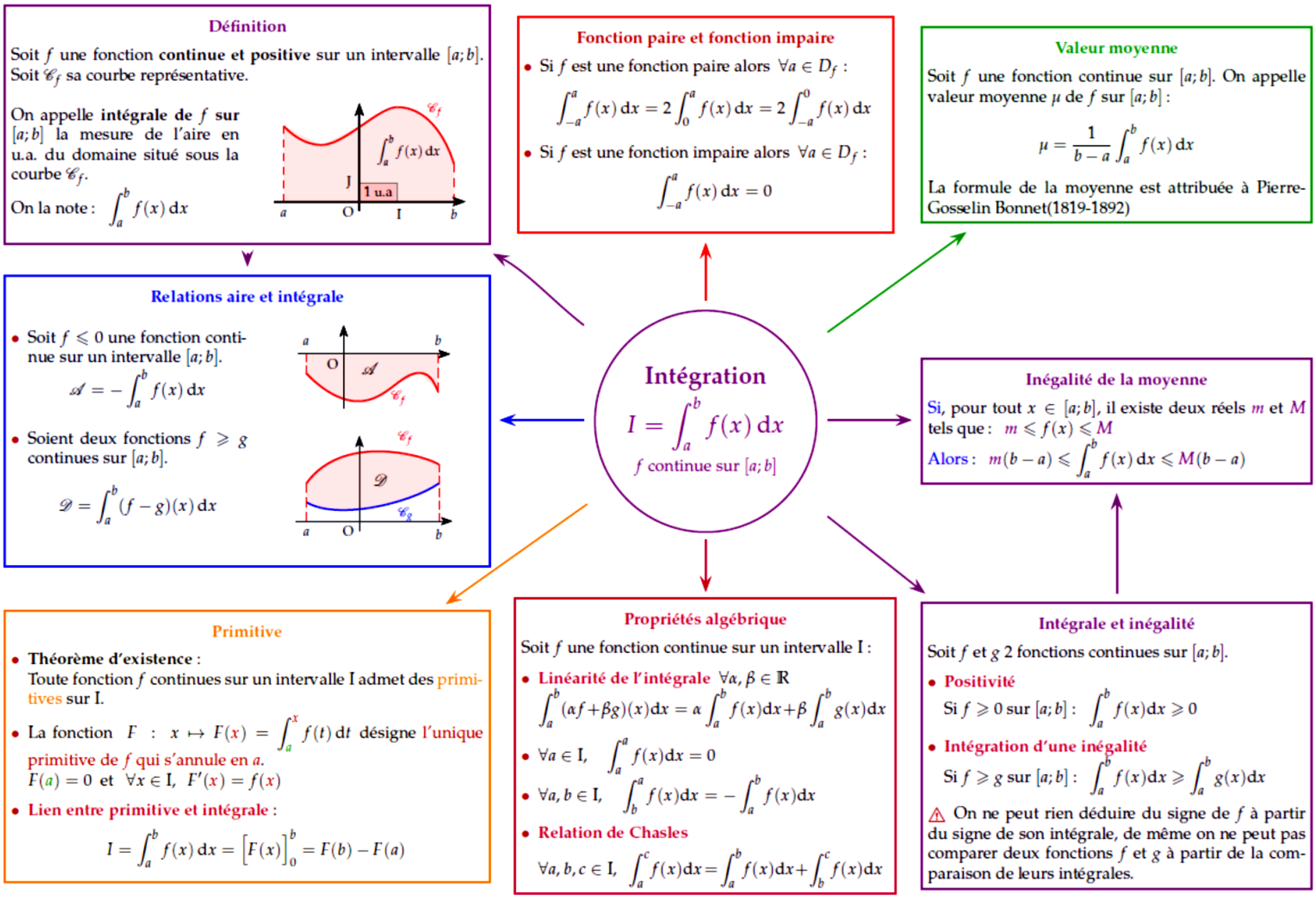
$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Remarque : dans le cas où f est positive et continue sur $[a\,;b]$, la valeur moyenne de f entre a et b représente la hauteur du rectangle construit sur l'intervalle $[a\,;b]$.



Vidéo : encadrer une intégrale

Vidéo : calculer la valeur moyenne d'une fonction



Quelques méthodes pour trouver une primitive

1) Le tableau des primitives usuelles.
2) Adapter un coefficient de façon à obtenir une forme que donne une primitive connue.

$$f(x)=\frac{1}{(3x+5)^2}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{(3x+5)^2}=\frac{1}{3}\times\frac{u'(x)}{u^2(x)}\quad\Rightarrow\quad F(x)=\frac{-1}{3(3x+5)}$$

3) La décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle dans le but de se ramener à 1)

$$f(x)=\frac{4x+5}{2x+1}=2+\frac{3}{2x+1}\quad\Rightarrow\quad F(x)=2x+\frac{3}{2}\ln|2x+1|$$

4) Il arrive parfois que l'on accède à deux intégrales I et J grâce à un système linéaire astucieux.

Compléments : quelques calculs astucieux d'intégrales

1) $I_1=\displaystyle\int_1^e\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_1^e\frac{1}{x}\times\ln x\,\mathrm{d}x=\int_1^e u'(x)u(x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_1^e=\dots$

2) $I_2=\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x=\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\times\frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x=\int_e^{e^2}\frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=\Big[\ln(\ln x)\Big]_e^{e^2}=\dots$

3) Utilisation des formules trigonométrique de duplication.

$$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2u(x)u'(x)\,\mathrm{d}x=\Big[\sin^2 x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x+1}{2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\right]\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Forme implicite

- En terminale, on doit parfois se résigner à prédire l'existence de primitives sans parvenir à les exhiber.

  Par exemple, on ne sait pas déterminer l'unique primitive de « ln » qui s'annule en $x=e$ de manière explicite mais on dispose d'une description explicite : $\displaystyle\int_e^x \ln x\,\mathrm{d}x$.

- On peut montrer qu'il n'est pas possible d'exprimer une primitive de la fonction de Gauss $x\mapsto e^{-x^2}$ à l'aide de fonction usuelles. Il faut donc parfois se résigner à manipuler des expressions abstraites.

  On retrouve en probabilité cette intégrale dans la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite avec la fonction Φ

  $\Phi=\displaystyle\int_{-\infty}^x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$

  On peut montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$

Intégration par parties
(méthode de calcul désormais hors programme)

- Cette méthode utilise la dérivée du produit : $(uv)'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

  Soit u et v deux fonctions dérivables, de dérivée continues, sur $[a;b]$.
  (On dit que u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$)

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

  En effet :

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b=\int_a^b u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow$$

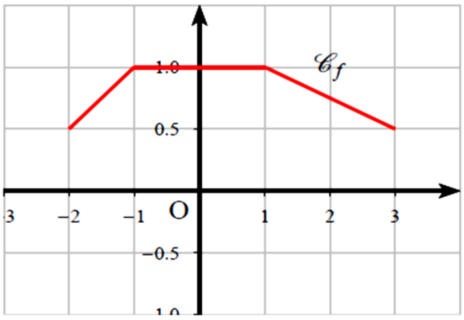
$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

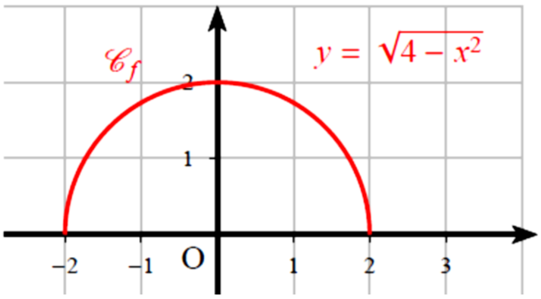
- Calculer : $I=\displaystyle\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x$, on pose alors $\begin{cases}u(x)=\ln x & u'(x)=\dfrac{1}{x}\\ v'(x)=x & v(x)=\dfrac{1}{2}x^2\end{cases}$

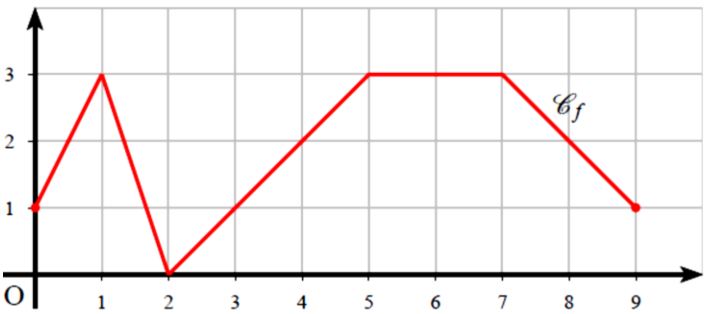
$$I=\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^2-0-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$

Exercice n°1 :

Pour chaque fonction représentée ci-dessous, calculer, en utilisant des aires géométriques, l'intégrale I de f sur l'intervalle de définition de f.



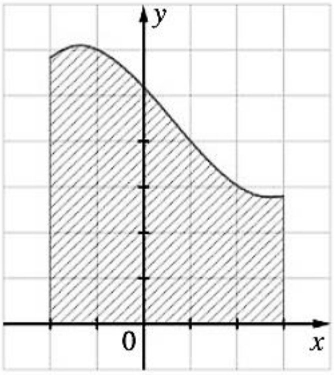




Exercice n°2 :

Partie A :

La courbe C_f ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2\,;3]$:

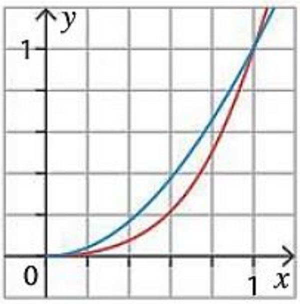


1) L'aire hachurée sur le graphique correspond à :
   a) $A = \int_{-2}^{3} f(x)\,dx$
   b) $A = \int_{3}^{6} f(x)\,dx$
   c) $A = \int_{3}^{-2} f(x)\,dx$
   d) $A = \int_{0}^{6} f(x)\,dx$
2) On note $A = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx$. Un encadrement de A est :
   a) $3 \leq A \leq 6$
   b) $12 \leq A \leq 15$
   c) $15 \leq A \leq 18$
   d) $21 \leq A \leq 25$
3) La valeur moyenne m_f de f sur $[-2\,;3]$ est :
   a) $m_f \approx 0{,}5$
   b) $m_f \approx 2{,}8$
   c) $m_f \approx 4{,}5$
   d) $m_f \approx 6$

Partie B :

On donne ci-dessous les courbes, C_f et C_g, des fonctions f et g définies sur $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = x^3$$



L'aire A du domaine situé entre C_f et C_g vaut :

a) $A = \displaystyle\int_0^1 g(x) - f(x)\,dx$

b) $A = \dfrac{1}{12}$

c) $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{g(x) + f(x)}{2}\,dx$

d) $A = f(1) - g(1)$

<u>Exercice n°3</u> :

Calculer les intégrales indiquées à l'aide d'une primitive.

1) $I = \int_1^2 t^2 + t - 6\, dt$
2) $I = \int_0^3 2e^x - 4x^3 + 2\, dx$
3) $I = \int_1^2 \frac{1}{x} - 4x\, dx$
4) $I = \int_{-2}^{-1} 2x(x^2+1)dx$
5) $I = \int_0^1 2te^{t^2-1}dt$
3) $I = \int_0^3 \frac{2}{(2t+1)^2}dt$
6) $I = \int_{-2}^{-1} 1 - \frac{3}{x}dx$
7) $I = \int_0^1 5e^{3x}dx$

<u>Exercice n°4</u> :

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 13$$

1) Déterminer les primitives de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2) Déterminer la primitive G de f telle que $G(2) = 10$.
3) Calculer l'intégrale :

$$\int_0^2 f(x)dx$$

<u>Exercice n°5</u> :

1) Une entreprise produit x centaines d'objets chaque semaine. Le coût de production exprimé en milliers d'euros est défini sur l'intervalle $[0\,;5]$ par la fonction C telle que :

$$C(x) = (4x+1)e^{-x}$$

   a) En utilisant une intégration par parties, calculer la valeur moyenne de C sur $[0\,;5]$.
   b) Quelle interprétation peut-on faire de ce résultat pour l'entreprise ?
2) Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter la progression.
On note $f(x)$ la concentration dans le sang (en mg/L) en fonction du temps t (en heures) d'un antibiotique administré en une seule dose à un animal avec t appartenant à l'intervalle $[0\,;24]$.
On admet que pour tout réel t dans cet intervalle, on a :

$$f(t) = \frac{50t}{t^2+4}$$

Calculer la concentration moyenne de l'antibiotique pendant les 10 premières heures.
Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième.

Exercice n°6 : Bac *ES* Métropole 2019

Un ébéniste décide de refaire les accoudoirs d'un fauteuil (ébauche du fauteuil en *annexe* 1).
On modélise l'accoudoir à l'aide de la fonction f définie sur $[0\ ;\ 60]$ par :

$$f(x) = 70 + (14x + 42)e^{-\frac{x}{5}}$$

La courbe représentative de f, notée C_f est donnée en *annexe* 2.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $[0\ ;\ 60]$.
On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A :

Dans toute cette partie, les réponses sont obtenues graphiquement à partir de la courbe représentative de f donnée en annexe 2.

On admet que le point A de C_f d'abscisse 7 est un point d'inflexion de C_f.

1) Déterminer une valeur approchée de $f(0)$ et $f(60)$.
2) Déterminer $f''(7)$.
3) On considère la surface située entre l'axe des abscisses, la courbe C_f, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 60$.
   a) Hachurer la surface décrite ci-dessus sur *l'annexe* 2.
   b) L'ébéniste estime l'aire de cette surface à 3 800 unités d'aire.
   Cette estimation est-elle correcte ?

Partie B :

1) Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 60]$ on a :

$$f'(x) = \frac{1}{5}(-14x\ + 28)e^{-\frac{x}{5}}$$

2) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 60]$.
3) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 60]$. On arrondira à l'unité près les valeurs numériques qui apparaissent dans le tableau de variations.
4) Un logiciel de calcul formel permet d'afficher les lignes suivantes :

1	Dérivée $\left(\text{Dérivée}\left(70 + (14x + 42)\ e^{-\frac{x}{5}}\right)\right)$
○	$\rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{1}{25}(14x + 42)\ e^{-\frac{1}{5}x} - \frac{28}{5}\ e^{-\frac{1}{5}x}}$
2	Factoriser $\left(\frac{1}{25}(14x + 42)\ e^{-\frac{1}{5}x} - \frac{28}{5}\ e^{-\frac{1}{5}x}\right)$
○	$\rightarrow \quad \boldsymbol{14 e^{-\frac{1}{5}x} . \frac{x-7}{25}}$

En utilisant les résultats ci-dessus, étudier la convexité de f.

5) Pour tout nombre réel de l'intervalle $[0\ ;\ 60]$, on pose :

$$g(x) = (14x + 42)e^{-\frac{x}{5}} \quad \text{et} \quad G(x) = (-70x - 560)e^{-\frac{x}{5}}$$

   a) Montrer que G est une primitive de g sur l'intervalle $[0\ ;\ 60]$.
   b) En déduire une primitive de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 60]$.
   c) Calculer la valeur exacte puis en donner une valeur approchée à l'unité d'aire près de :

$$\int_0^{60} f(x)dx$$

Exercice n°7 : Bac *ES* Asie 2014

On étudie la propagation d'une maladie lors d'une épidémie.

Partie A :

Des relevés statistiques ont permis de modéliser, par une fonction f, le nombre de malades durant l'épidémie. Cette fonction f est définie sur $[1\,;26]$ par :

$$f(t)=24t\ln(t)-3t^2+10$$

où t est le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et $f(t)$ est le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines.

2) On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Montrer que, pour tout réel t de $[1\,;26]$, on a :

$$f'(t)=24\ln(t)-6t+24$$

3) On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f.
   Montrer que, pour tout réel t de $[1\,;26]$, on a :

$$f''(t)=\frac{24-6t}{t}$$

4) En déduire que les variations de la fonction f' sont données dans le tableau suivant :

t	1		4		26
$f'(t)$		↗		↘	

5) Montrer que l'équation $f'(t)=0$ admet, dans l'intervalle $[1\,;26]$, une solution et une seule qu'on notera α et donner l'encadrement de α par deux entiers consécutifs et en déduire le signe de $f'(t)$ sur $[1\,;26]$ et les variations de f sur $[1\,;26]$.
6) Le réel $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines et $f''(t)$ l'accélération ou le ralentissement de la propagation de la maladie au bout de t semaines
   a) Dans le contexte du problème, donner une interprétation de l'expression mathématique suivante : « sur $[4\,;26]$, f est concave. ».
   b) À partir des questions précédentes, déterminer le nombre de semaines écoulées à partir duquel le nombre de malades par semaine a commencé à diminuer.
   c) Pourquoi les points d'inflexions sont-ils si importants pour les épidémiologistes ?

Partie B :

On admet que la fonction G définie par :

$$G(t)=12t^2\ln(t)-6t^2$$

est une primitive sur $[1\,;26]$ de la fonction g définie par :

$$g(t)=24t\ln(t)$$

1) Déterminer, sur $[1\,;26]$, une primitive F de la fonction f.
2) On a trouvé que l'arrondi, à l'entier, de :

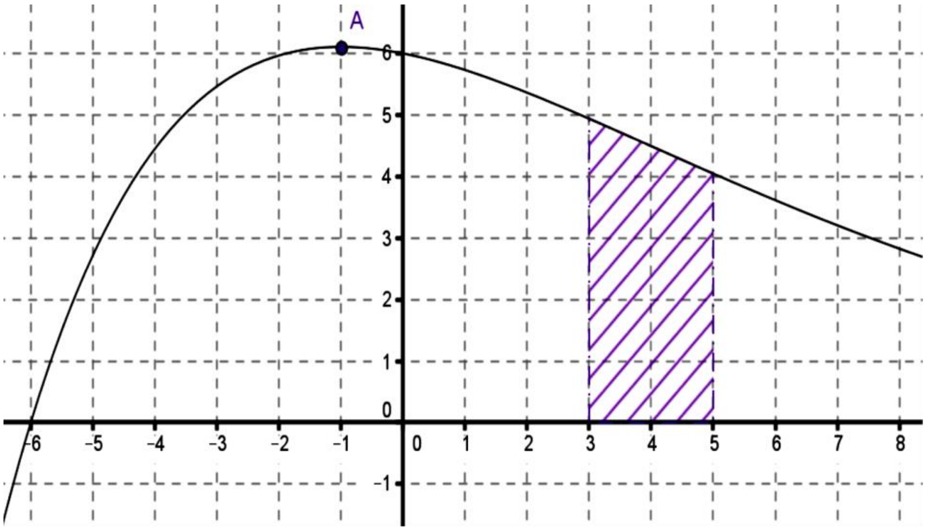
$$\frac{1}{26-1}[F(26)-F(1)]\approx 202$$

   Interpréter.

Exercice n°8 : Bac *ES* Asie 2015

On donne ci-dessous, la courbe C_f représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.

La tangente à C_f au point A d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.



Partie A : Lectures graphiques

1) Donner, en justifiant votre réponse, la valeur de $f'(-1)$.
2) Déterminer, en justifiant votre réponse, le signe de $f''(-3)$.
3) Donner un encadrement par deux entiers de l'aire du domaine hachuré.

Partie B : Etude de la fonction *f*.

La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x) = (x+6)e^{-0,2x}$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$ et f'' sa dérivée seconde sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = (-0,2x - 0,2)e^{-0,2x}$$

2) Etudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3) On admet que pour tout réel x on a :

$$f''(x) = (0,04x - 0,16)e^{-0,2x}$$

   Etudier la convexité de la fonction f et préciser le(s) point(s) d'inflexion(s) de C_f.
4) Démontrer que F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = (-5x - 55)e^{-0,2x} \text{ est une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}$$

5) Calculer (on donnera la valeur exacte puis arrondie au centième près) :

$$\int_3^5 f(x)dx$$

Partie C : Application économique.

La fonction de demande d'un produit est modélisée sur l'intervalle $[1\,;8]$ par la fonction f étudiée dans la **Partie B**. Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en centaines de milliers d'objets, quand le prix unitaire vaut x euros.

1) Calculer le nombre d'objets demandés, au millier près, quand le prix unitaire est fixé à 4€.
2) En utilisant les résultats de la **Partie B**, déterminer la demande moyenne, arrondie au millier d'objets près, lorsque le prix unitaire varie entre 3 et 5 euros.